



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu
em Física

Dissertação de Mestrado

Soluções Localizadas em Diversas Dimensões

Matheus Araújo Marques

João Pessoa
2015



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu
em Física

Dissertação de Mestrado

Soluções Localizadas em Diversas Dimensões

Dissertação realizada sob a orientação do Prof. Dr. Dionisio Bazeia Filho e coorientação do Prof. Dr. Roberto Menezes da Silva, apresentada a Coordenação do Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Física da Universidade Federal da Paraíba, em complementação aos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Física na Área de Concentração de Física de Partículas e Campos.

Matheus Araújo Marques

João Pessoa
2015

M357s Marques, Matheus Araújo.
Soluções localizadas em diversas dimensões / Matheus
Araújo Marques.- João Pessoa, 2015.
110f. : il.
Orientador: Dionisio Bazeia Filho
Coorientador: Roberto Menezes da Silva
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN
1. Física. 2. Física de partículas e campos. 3. Defeitos
topológicos. 4. Mundo brana. 5. Soluções localizadas.

UFPB/BC

CDU: 53(043)

Agradecimentos

"If I have seen further it is by standing on the shoulders of giants"
Isaac Newton

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer à minha família, especialmente à minha mãe e aos meus avós, que me deram a formação pessoal e as condições necessárias para que eu pudesse dar mais esse passo em minha vida acadêmica. Um agradecimento especial fica ao Prof. Dionísio, que me acolheu como seu estudante ainda na época escolar, no ensino médio, e que, desde então, tem me orientado com atenção sem igual, sendo um verdadeiro mentor em minha vida. Ao Prof. Roberto Menezes, deixo toda a minha gratidão por também ter me orientado ao longo desses anos. Sem ele, este trabalho jamais teria chegado ao formato atual. Agradeço também aos meus bons amigos que sempre acreditaram em mim e me apoiaram. Gostaria de agradecer ainda ao Prof. Laércio Losano pela ajuda e pelas discussões que contribuíram com o desenvolvimento desse trabalho. Por fim, agradeço ao CNPq pelo suporte financeiro.

Resumo

Esta dissertação lida com soluções localizadas em diversas dimensões. Inicialmente, fazemos uma revisão de alguns tópicos em teoria clássica de campos usando campos escalares tanto no espaço plano como no espaço curvo. São eles: kinks, lumps, vórtices, monopolos, dyons, cosmologia com campos escalares e branas modeladas por campos escalares. A seguir apresentamos alguns resultados originais. Primeiramente, introduzindo nos modelos um parâmetro que pode ser real ou inteiro, estudamos uma maneira de ir de kinks para compactons em modelos com dinâmica padrão e mostramos como o procedimento funciona no cenário de mundo brana. Por fim, usando o método da deformação, apresentamos novos modelos que suportam estruturas compactas e estudamos sua estabilidade linear.

Palavras-chave: defeitos topológicos, mundo brana, soluções localizadas.

Abstract

This dissertation deals with localized solutions in several dimensions. Initially, we review some topics in classical theory of fields by using scalar fields both in flat and curved spacetime. Here they are: kinks, lumps, vortices, monopoles, dyons, cosmology with scalar fields and branes modeled by scalar fields. After this, we present some original results. Firstly, by introducing a real or integer parameter in the models, we study a way to go from kinks to compactons in models with standard dynamics and show how the procedure works in the braneworld scenario. Finally, by using the deformation method, we present new models that support compact structures and then study their linear stability.

Keywords: braneworld, localized solutions, topological defects.

Lista de Publicações

- D. Bazeia, L. Losano, M. A. Marques and R. Menezes, *From Kinks to Compactons*, Phys. Lett. B, Volume 736, Pages 515–521 (2014);
- D. Bazeia, L. Losano, M. A. Marques and R. Menezes, *Compact Structures in Standard Field Theory*, Europhys. Lett., Volume 107, Number 6, 61001 (2014).

Sumário

1	Introdução	1
I	Tópicos em Teoria Clássica de Campos	5
2	Kinks e Lumps	6
2.1	Modelo de um campo escalar real	6
2.1.1	Soluções BPS	8
2.1.2	O método da deformação	9
2.1.3	Estabilidade Linear	9
2.1.4	Exemplos de kinks	11
2.1.4.1	Modelo ϕ^4	11
2.1.4.2	Modelo seno-Gordon	12
2.1.5	Exemplos de Lumps	13
2.1.5.1	Modelo ϕ^3	13
2.1.5.2	Modelo ϕ^4 invertido	15
2.2	Modelo de dois campos escalares reais	15
2.2.1	Método BPS	17
2.2.2	Estabilidade Linear	18
2.2.3	Modelo BNRT	19
3	Compactons	23
3.1	Modelos com dinâmica generalizada	23
3.1.1	Modelos com dinâmica quártica	24
3.1.1.1	Estabilidade Linear	25
3.2	Exemplos de Compactons	26
3.2.1	Modelo ϕ^4	26
3.2.2	Modelo seno-Gordon	28
4	Vórtices	31
4.1	Vórtices globais	31
4.2	Vórtices locais	33
4.2.1	Vórtices de Maxwell-Higgs	34
4.2.1.1	Potencial ϕ^4	37
4.2.1.2	Equações BPS	39
4.2.2	Vórtices de Chern-Simons-Higgs	40
4.2.2.1	Potencial ϕ^6	43
4.2.2.2	Equações BPS	45

5	Monopolos e Dyons	46
5.1	Teoria de Yang-Mills-Higgs SU(2)	46
5.2	Dyons	48
5.3	Monopolos	51
5.4	Monopolo BPS	52
5.5	Dyon BPS	54
6	Cosmologia com Campos Escalares	56
6.1	Ação de Einstein-Hilbert	56
6.2	Equação da Geodésica	58
6.3	Limite Newtoniano	59
6.4	Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)	60
6.4.1	Formalismo de primeira ordem com campos escalares	62
7	Mundo Brana	67
7.1	Modelo de Brana com um campo escalar	67
7.1.1	Brane Splitting	71
7.2	Modelo de Brana com dois campos escalares	73
7.2.1	Bloch Brane	74
II	Novos Resultados	76
8	De Kinks para Compactons	77
8.1	Generalidades	77
8.2	Modelo 1	78
8.3	Modelo 2	82
8.4	Brana Híbrida	84
9	Estruturas Compactas em Teoria de Campos Usual	87
9.1	O procedimento	87
9.2	Modelo 1	88
9.3	Modelo 2	90
9.4	Estabilidade Linear	93
9.4.1	Modelo 1	93
9.4.2	Modelo 2	94
10	Conclusões e Perspectivas	97
	Referências Bibliográficas	98

CAPÍTULO 1

Introdução

Em 1834, John Scott Russel, um engenheiro escocês, estava andando a cavalo próximo a um canal de água quando, ao ver um barco parar, percebeu que uma onda de água saiu da proa do barco e se moveu rapidamente canal abaixo preservando sua forma e velocidade por várias milhas. Curiosamente, essa onda não subia, descia ou se espalhava como ondas comuns fazem. As ondas com essas características específicas foram denominadas sólitons e estão presentes nos contextos de ótica e hidrodinâmica [1]. A equação KdV (em homenagem aos matemáticos Diederik Korteweg e Gustav de Vries), por exemplo, suporta soluções do tipo sóliton e fornece um modelo matemático para o estudo dessas ondas em águas rasas. Há diversos resultados matemáticos em teoria de campos envolvendo sólitons. Experimentalmente, eles surgem no estudo de sistemas ferromagnéticos [2].

Imaginemos uma flor na qual tenhamos essencialmente duas regiões: uma amarela e outra vermelha. Entre essas duas cores há um limiar, uma parede que separa os dois domínios. Quando isso ocorre, dizemos que nosso sistema apresenta um defeito topológico. Em outras palavras, existe uma mudança no campo associado a essas cores: de um lado da parede o campo assume um valor, que representa a cor amarela, por exemplo, e do outro lado assume o outro valor, que corresponda à cor vermelha. Porém, dentro da interface, existe uma transição, nós não podemos dizer em qual dos dois domínios estamos. Um aspecto curioso é que esse defeito é fundamentalmente estático: podemos observar a flor nesse momento ou daqui a alguns instantes e o defeito, nesse caso, será o mesmo; ele não evolui com o tempo. Além disso, não precisamos usar uma teoria quântica para estudar esse defeito. A teoria clássica de campos nos fornece uma boa descrição do sistema.

Dentre os campos disponíveis em teoria de campos, os campos escalares são os mais simples e têm sido bastante estudados, como podemos ver na Ref. [3]. Os defeitos topológicos surgem como soluções clássicas das equações de movimento. Essas soluções são localizadas, estáveis e possuem energia localizada. Podemos encontrar soluções localizadas em diversas dimensões. Em particular, no espaço-tempo plano, temos três tipos muito conhecidos; são os kinks, os vórtices e os monopolos.

Em $(1,1)$ dimensões, podemos encontrar os kinks. São os defeitos mais simples que surgem em teoria de campos. Eles aparecem como soluções estáticas das equações de movimento e conectam os mínimos do potencial associado ao modelo. Nesse caso, as equações de movimento são altamente não lineares, de difícil resolução. Contudo, é possível encontrar equações de primeira ordem que ajudam na obtenção de soluções analíticas. Kinks são encontrados em diversos sistemas de laboratório e constituem uma configuração interessante para o estudo de física não linear e não perturbativa. Além disso, também são úteis no estudo de transições de fase e em outros tópicos de matéria condensada [2,4]. Pode-se estudar um kink imerso em três dimensões espaciais. Nesse caso, surgem as paredes de domínio. No estudo de materiais magnéticos há três tipos de paredes bastantes estudadas: Ising, Néel e Bloch. Na Fig. 1.1, podemos ver um gráfico com o comportamento do vetor de magnetização para cada caso. É interessante citar que na Ref. [5]

se encontrou materiais que, apesar de serem predominantemente do tipo Ising, também apresentam características dos tipos Bloch e Néel.

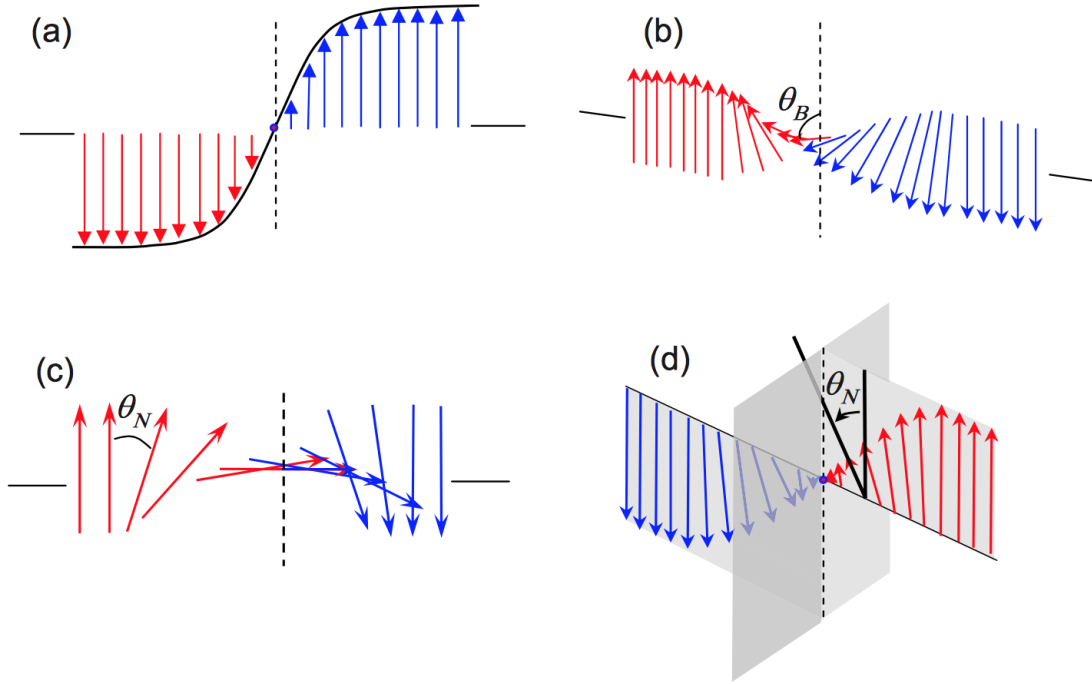


Figura 1.1 Diferentes tipos de paredes de domínio: (a) Ising, (b) Bloch, (c) Néel e (d) Ising-Néel. Uma parede do tipo Ising-Bloch seria similar a (d), porém com o ângulo de rotação θ_B fora do plano de polarização do vetor [5].

Quando estudamos um sistema em duas dimensões espaciais, isto é, $(2,1)$ dimensões, encontramos soluções estáticas do tipo vórtice. Contudo, por razões de finitude da energia, o campo escalar não está sozinho; ele deve ser acoplado ao campo de gauge por um grupo de simetria $U(1)$. Assim, temos equações de movimento acopladas e as equações de primeira ordem só são obtidas para casos bastante restritos. Até o presente momento, as soluções analíticas não foram encontradas para os vórtices e por isso é preciso recorrer ao auxílio do cálculo numérico. Vórtices foram inicialmente estudados por Hermann von Helmholtz em [6] e são comumente encontrados em mecânica dos fluidos [7]. Contudo, vórtices também surgem em matéria condensada no estudo de materiais supercondutores. De acordo com o efeito Meissner, sabemos que supercondutores expulsam o campo magnético quando estão abaixo de uma temperatura crítica. Em [8], Abrikosov notou que supercondutores do tipo II apresentam vórtices quando submetidos à uma dada faixa de valores para campo eletromagnético externo aplicado. Na Fig. 1.2, podemos ver a primeira observação da rede de vórtices de Abrikosov [9].

Os monopolos magnéticos surgem como soluções estáticas das equações de movimento em $(3,1)$ dimensões, numa densidade lagrangiana de Yang-Mills-Higgs $SU(2)$. As equações são altamente não-lineares, acopladas e de segunda ordem. Como nos dois casos anteriormente citados, é possível encontrar equações de primeira ordem. Contudo, a condição é bem restrita: o potencial do nosso modelo deve ser nulo. Curiosamente, esse modelo admite soluções analíticas, embora tenha uma estrutura matemática mais complexa do que a de vórtices. Ainda em $(3,1)$ dimensões, também se encontra soluções

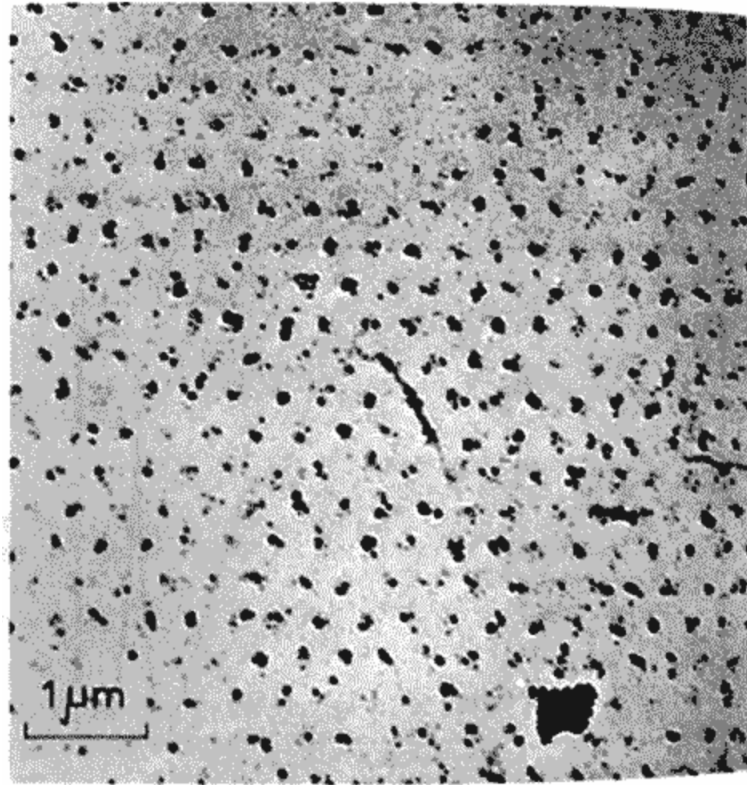


Figura 1.2 Rede de vórtices de Abrikosov [9].

que apresentam simultaneamente os pólos elétrico e magnético, as quais são denominadas dyons. Após serem teorizados por Dirac [10] em 1948, um esforço tem sido feito para se encontrar monopolos em laboratório [11]. Em 2010, foi aprovado, no LHC do CERN, o experimento MoEDAL [12] para a busca de monopolos. Ele deve começar seus experimentos oficialmente em 2015.

Após a Relatividade Geral de Einstein, a noção de espaço curvo se popularizou. Em particular, surgiu um forte interesse no estudo da expansão do universo, uma área conhecida como cosmologia. Friedmann, considerando que o universo é homogêneo e isotrópico em larga escala, foi o primeiro a encontrar uma solução da equação de Einstein que poderia descrever a evolução do nosso universo. É possível se estudar teoria de campos no espaço curvo e, como veremos, campos escalares podem ser usados para se fazer modelos cosmológicos para nosso universo.

Em Teoria de Cordas, surgem modelos de branas. A Teoria de Supercordas é bem definida em um espaço-tempo de 10 dimensões, ou seja, as supercordas exigem seis dimensões extras além das quatro que nós conhecemos [13]. Esse espaço-tempo pode ser fatorado em $AdS_5 \times S_5$. Assim, no espaço curvo, em $(4,1)$ dimensões, pode-se estudar modelos de mundo brana numa geometria AdS_5 com uma dimensão extra infinita. O grande trunfo desses modelos é tentar resolver o problema da hierarquia, que é a enorme discrepância que existe entre as escalas de massa da interação fraca e da gravitacional. O modelo ADD [14] é o primeiro a seguir essa direção. Nele, os campos do modelo padrão estariam confinados à uma brana quadridimensional, enquanto que a gravidade poderia se propagar pelas dimensões espaciais extras que seriam muito maiores do que a escala de Planck [15]. Em 1999, Lisa Randall e Raman Sundrum publicaram dois artigos sobre mundo brana [16,17], em que encontraram uma hierarquia do tipo exponencial entre as

escalas fraca e de Planck. Nesse modelo de brana, como as equações da teoria só dependem da coordenada da dimensão extra, pode-se usar campos escalares para fazer modelos de mundo brana. Nesse caso, o kink na dimensão extra é responsável por modelar a brana.

Esta dissertação apresenta duas partes. A parte I contém 6 capítulos e constitui uma revisão dos tópicos acima, que são essenciais para o estudo de teoria clássica de campos. Dedicamos os capítulos 2 e 3 às soluções localizadas existentes em $(1, 1)$ dimensões, onde fazemos um estudo minucioso, investigando a estabilidade do sistema e apresentando o método BPS para encontrar equações de primeira ordem para os campos. No capítulo 2, analisamos detalhadamente as soluções dos tipos kinks e lumps. No capítulo 3, encontramos soluções compactas em modelos com dinâmica generalizada.

O capítulo 4 é destinado ao estudo de vórtices. Nesse capítulo, apresentamos um modelo de vórtice global e verificamos que sua energia não é finita. Em seguida, acoplamos o campo escalar complexo ao campo de gauge via acoplamento mínimo e estudamos vórtices locais com os termos de Maxwell e de Chern-Simons separadamente. Deduzimos ainda as equações de primeira ordem e mostramos as restrições no potencial para as quais elas emergem. Como não sabemos encontrar as soluções analíticas para as equações de movimento, apresentamos as soluções assintóticas das equações linearizadas.

No capítulo 5, investigamos o monopolo de 't Hooft-Polyakov e o dyon de Julia-Zee. Encontramos as equações de movimento para cada caso, o campo elétrico, o campo magnético e apresentamos as equações de primeira ordem (BPS) e suas soluções. A partir disso, encontramos a energia associada a cada campo e verificamos que ela é finita.

Os capítulos 6 e 7 são dedicados ao espaço curvo. No capítulo 6, a fim de introduzir o leitor no espaço curvo, deduzimos a equação de Einstein e em seguida estudamos o modelo cosmológico de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). Por fim, ainda nesse capítulo, exibimos modelos cosmológicos com campos escalares, bem como um formalismo de primeira ordem que nos permite encontrar soluções analíticas.

O capítulo 7 marca o fim da parte de revisão desta dissertação. Ele apresenta modelos de brana com um ou dois campos escalares, fazendo uma distinção clara entre brana fina (thin brane) e brana espessa (thick brane). A estabilidade da brana é brevemente estudada. No caso de um campo escalar, estudamos um modelo que gera uma separação na brana (brane splitting) e, no caso de dois campos escalares, estudamos o modelo BNRT apresentado no capítulo 2, que no espaço curvo dá origem à brana de Bloch (Bloch brane).

A parte II contém os resultados originais de dois artigos que foram publicados durante o mestrado. O conhecimento adquirido nos capítulos 2, 3 e 7 é *sine qua non* para a compreensão do conteúdo desta parte. No capítulo 8, apresentamos um procedimento para ir suavemente de kinks para compactons em modelos com dinâmica padrão. Para isso, introduzimos um parâmetro que pode ser real ou inteiro em nossos modelos. A seguir, investigamos como esse método funciona no cenário de mundo brana e vemos surgir um tipo de brana que chamamos de híbrida. No capítulo 9, apresentamos a existência de soluções compactas em modelos de teoria de campos governados pela dinâmica padrão. Finalmente, no capítulo 10, discutimos as conclusões e perspectivas deste trabalho. Nessa dissertação, usaremos o sistema de unidades naturais, isto é, $\hbar = c = 1$.

PARTE I

Tópicos em Teoria Clássica de Campos

Kinks e Lumps

Em teoria de campos, campos escalares são os mais simples. Na primeira seção deste capítulo, estudaremos o modelo de um campo escalar real e apresentaremos exemplos que suportam soluções topológicas, conhecidas como kinks, ou não topológicas, conhecidas como lumps. Na seção seguinte, introduziremos mais um campo no estudo. Vale notar que existem modelos com três campos escalares reais [18]. Aqui, tudo será feito no espaço-tempo plano.

2.1 Modelo de um campo escalar real

Campos escalares reais, quando estudados no espaço de Minkowski em $(D,1)$ dimensões espaço-temporais, são, de maneira geral, funções de $x^\mu = (t, \vec{x})$, onde \vec{x} é sua parte espacial. O tensor métrico é tal que $\eta_{00} = 1$, $\eta_{11} = \eta_{22} = \dots = \eta_{DD} = -1$ e $\eta_{\mu\nu} = 0$ se $\mu \neq \nu$. A ação¹ associada a um único campo escalar real $\phi = \phi(x^\mu)$ é

$$S = \int d^{D+1}x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi), \quad (2.1)$$

onde $\partial_\mu \phi = \partial \phi / \partial x^\mu$. A densidade lagrangiana a ser usada é a padrão, dada por

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (2.2)$$

onde V é uma densidade de energia potencial (que chamaremos simplesmente de potencial). A massa clássica é definida pela expressão

$$m_i = \left. \frac{d^2 V}{d\phi^2} \right|_{\phi=v_i}, \quad (2.3)$$

onde v_i são os mínimos do potencial. A equação de Euler-Lagrange nos fornece

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (2.4)$$

O tensor energia momento é dado por

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (2.5)$$

Em $(1,1)$ dimensões, abrindo-o em componentes, temos

$$T_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \phi'^2 + V & \dot{\phi} \phi' \\ \dot{\phi} \phi' & \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \phi'^2 - V \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

¹Para aspectos técnicos básicos em Teoria Clássica de Campos, ver o livro de Mecânica Clássica do Goldstein [19].

onde $\dot{\phi} = \partial\phi/\partial t$ e $\phi' = \partial\phi/\partial x$. Soluções estáticas e uniformes satisfazem $dV/d\phi = 0$. Para o caso estático unidimensional, $\phi = \phi(x)$, temos a seguinte equação

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{dV}{d\phi}. \quad (2.7)$$

Multiplicando-a por $d\phi/dx$, encontramos

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 \right] = \frac{dV}{dx}, \quad (2.8)$$

que pode ser integrada com respeito a x para se chegar a

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 = V + c, \quad (2.9)$$

onde c é uma constante de integração. A densidade de energia é

$$\rho = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi). \quad (2.10)$$

Na equação acima, o primeiro e segundo termo correspondem às densidades de energia gradiente e potencial, respectivamente. Portanto, a energia do sistema é

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi) \right]. \quad (2.11)$$

Para evitar divergências nas energias gradiente e potencial de maneira independente, a Eq. (2.11) nos leva a exigir que o campo satisfaça

$$\phi'(x \rightarrow \pm\infty) \rightarrow 0 \quad (2.12a)$$

e

$$\phi(x \rightarrow \pm\infty) \rightarrow v_{\pm}, \quad (2.12b)$$

onde $\phi' = d\phi/dx$ e v_{\pm} são dois mínimos adjacentes do potencial, isto é, $V(v_{\pm}) = 0$. Ao tomar o limite assintótico em Eq. (2.9) usando as condições acima, podemos concluir que $c = 0$. Assim, a equação diferencial para o nosso campo estático fica de primeira ordem, dada por

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 = V \quad (2.13)$$

e a energia

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 = 2 \int_{-\infty}^{\infty} dx V. \quad (2.14)$$

A condição presente na Eq. (2.12b) pode se realizar de duas formas, $v_- = v_+$ ou $v_- \neq v_+$, representadas pela corrente topológica

$$j^{\mu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu} \partial_{\nu} \phi. \quad (2.15)$$

Para as soluções estáticas, apenas sua componente temporal sobrevive e pode ser integrada para encontrarmos a carga topológica dada por

$$Q = \frac{1}{2} [\phi(x \rightarrow +\infty) - \phi(x \rightarrow -\infty)] = \frac{1}{2}(v_+ - v_-). \quad (2.16)$$

Assim, Q exibe a diferença de comportamento assintótico da solução estática e ajuda a classificar as soluções em dois tipos:

- topológicas ou kinks, as quais se iniciam em um valor do campo para $x \rightarrow -\infty$ e suavemente vão para um outro valor de campo em $x \rightarrow \infty$, ou seja, $v_- \neq v_+ \Rightarrow Q \neq 0$;
- não-topológicas ou lumps, que suavemente saem de um valor do campo para $x \rightarrow -\infty$, variam e retornam a seu valor inicial quando $x \rightarrow \infty$. Nesse caso, temos $v_- = v_+ \Rightarrow Q = 0$.

Nas Refs. [20–22] podemos encontrar mais detalhes sobre o estudo de defeitos topológicos. Vale notar que não há uma maneira única de se definir a corrente topológica. Esse fato é importante pois ele permite usar uma definição diferente e mais apropriada para o estudo de modelos com soluções especiais, como no caso de um sistema “vacuumless” [23].

2.1.1 Soluções BPS

Uma classe especial de soluções surge quando nosso potencial $V(\phi)$ pode ser escrito como função de $W = W(\phi)$, tal que

$$V(\phi) = \frac{1}{2} W_\phi^2, \quad (2.17)$$

onde $W_\phi = dW/d\phi$. Nesse caso, a equação de movimento (2.7) assume a forma

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = W_\phi W_{\phi\phi} \quad (2.18)$$

e a densidade de energia (2.10) fica dada por

$$\rho = \frac{1}{2} \phi'^2 + \frac{1}{2} W_\phi^2, \quad (2.19)$$

que pode ser escrita na forma

$$\rho = \frac{1}{2} (\phi' \mp W_\phi)^2 \pm \frac{dW}{dx}. \quad (2.20)$$

A energia, portanto, fica

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx (\phi' \mp W_\phi)^2 \pm \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{dW}{dx}. \quad (2.21)$$

Como o primeiro termo é sempre não negativo e o segundo termo é de superfície, a minimização da energia se dá quando o campo resolve a equação

$$\phi' = \pm W_\phi \quad (2.22)$$

e, portanto, fica com energia dada por

$$E = |W(\phi(x \rightarrow +\infty)) - W(\phi(x \rightarrow -\infty))|. \quad (2.23)$$

Aqui, surge algo interessante: temos uma equação diferencial de primeira ordem em ϕ e a energia só depende dos valores assintóticos dos campos. Essas soluções que vêm das equações de primeira ordem Eq. (2.22) recebem um nome especial e são ditas soluções BPS (em homenagem aos físicos Bogomol'nyi, Prasad e Sommerfield) [24] [25]. Os setores do potencial que apresentam essas soluções são ditos setores BPS.

2.1.2 O método da deformação

Encontrar modelos que descrevam determinados sistemas com características específicas pode ser uma tarefa árdua. As equações em geral são não-lineares, de difícil resolução. Quando não encontramos uma forma analítica para as soluções, precisamos recorrer ao cálculo numérico. O método da deformação [26] é uma alternativa para buscar potenciais e suas respectivas soluções analíticas [27]. Ele consiste em fazer o uso de uma função bijetora do campo, $f = f(\phi)$.

Consideremos duas densidades lagrangianas. Uma \mathcal{L} , conhecida e $\tilde{\mathcal{L}}$, a ser gerada, associadas aos campos ϕ e $\tilde{\phi}$, respectivamente, na forma padrão como em Eq. (2.2). Cada um dos dois modelos admitem equações de primeira ordem, como em (2.13). Se tomarmos $\phi = f(\tilde{\phi})$, encontramos o novo potencial \tilde{V} pela seguinte expressão:

$$\tilde{V}(\tilde{\phi}) = \frac{V(\phi \rightarrow f(\tilde{\phi}))}{\left[\frac{df(\tilde{\phi})}{d\tilde{\phi}}\right]^2}, \quad (2.24)$$

onde $V(\phi \rightarrow f(\tilde{\phi}))$ significa substituir ϕ por $f(\tilde{\phi})$ em $V(\phi)$. A solução para o novo modelo fica dada por

$$\tilde{\phi}(x) = f^{-1}(\phi(x)). \quad (2.25)$$

Aqui vemos a importância da bijetividade da função f . Se ela não fosse bijetiva, então ela não admitiria inversa e portanto não poderíamos determinar a nova solução.

2.1.3 Estabilidade Linear

É possível estudar a estabilidade das soluções estáticas $\phi = \phi(x)$, considerando-se pequenas flutuações $\eta(x, t)$ em torno delas. Portanto, vamos tomar o seguinte campo:

$$\phi(x, t) = \phi(x) + \eta(x, t) \quad (2.26)$$

Substituindo na equação de movimento (2.4) e desprezando os termos de ordem superior a η^2 , obtemos:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + U(x)\eta = 0 \quad (2.27)$$

onde

$$U(x) = \left. \frac{d^2 V}{d\phi^2} \right|_{\phi(x)} \quad (2.28)$$

é o potencial de estabilidade. Note que $U(x)$ tende assintoticamente às massas das excitações elementares. Como a solução só depende de x , podemos separar as variáveis da seguinte forma:

$$\eta(x, t) = \sum_n \eta_n(x) \cos(\omega_n t) \quad (2.29)$$

o que nos leva a uma equação semelhante a de Schrödinger:

$$H\eta_n(x) = \omega_n^2 \eta_n(x), \quad (2.30)$$

na qual

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + U(x). \quad (2.31)$$

A Eq. (2.30) nos permite enxergar que o autovalor não pode ser negativo, ou seja, ω_n deve ser real. Se o contrário ocorresse, nossa flutuação não seria pequena, já que o cosseno trigonométrico se transformaria em um cosseno hiperbólico. Logo, para que a solução seja linearmente estável, a equação de estabilidade não pode apresentar autovalores negativos.

Derivando a Eq. (2.7) com respeito a x , encontramos

$$-\frac{d^2\phi'}{dx^2} + \frac{d^2V}{d\phi^2}\phi' = 0, \quad (2.32)$$

que é uma equação do tipo Schrödinger com autovalor nulo. Dessa maneira, identificamos o modo zero como a derivada da solução estática:

$$\eta_0(x) = \frac{d\phi}{dx}. \quad (2.33)$$

Quando as soluções são do tipo BPS, podemos mostrar sua estabilidade. Para isso, reescrevemos o H da Eq. (2.31) como

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + W_{\phi\phi}^2 + W_{\phi}W_{\phi\phi\phi} \quad (2.34)$$

e construímos os operadores

$$S_{\pm} = -\frac{d}{dx} \pm W_{\phi\phi}, \quad (2.35)$$

que permitem definir os hamiltonianos

$$H_{\pm} = S_{\pm}^{\dagger}S_{\pm}. \quad (2.36)$$

Explicitamente,

$$H_{\pm} = -\frac{d^2}{dx^2} + W_{\phi\phi}^2 \pm W_{\phi}W_{\phi\phi\phi}, \quad (2.37)$$

que são parceiros supersimétricos [28] [29]. H_+ reproduz (2.34) e se fatoriza como (2.36). Portanto, é um operador não-negativo. Podemos mostrar que seus autovalores também são não-negativos aplicando η^{\dagger} em Eq. (2.30) pela esquerda e integrando:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta^{\dagger} S_+^{\dagger} S_+ \eta = \int_{-\infty}^{\infty} \eta^{\dagger} \omega^2 \eta, \quad (2.38)$$

ou ainda,

$$\omega^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |S_+ \eta|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |\eta|^2}. \quad (2.39)$$

Daí, fica claro que $\omega^2 \geq 0$. Isso garante a estabilidade dos modelos BPS. Vemos ainda que o modo zero pode ser escrito como

$$\eta_0(x) = AW_{\phi}, \quad (2.40)$$

onde A é uma constante de normalização.

2.1.4 Exemplos de kinks

2.1.4.1 Modelo ϕ^4

Um modelo muito conhecido em teoria de campos é o $\lambda\phi^4$ com quebra espontânea de simetria, cujo potencial é

$$V(\phi) = \frac{\lambda^2}{2}(\nu^2 - \phi^2)^2. \quad (2.41)$$

Em unidades naturais, a ação é adimensional e as coordenadas espaço-temporais têm dimensão de inverso da energia. Logo, em D dimensões espaciais, ou seja, $(1, D)$ dimensões espaço-temporais, o campo tem dimensão de energia elevado à potência $(D-1)/2$ ou simplesmente dimensão $(D-1)/2$. ν e λ são constantes reais positivas de dimensão $(D-1)/2$ e $(3-D)/2$, respectivamente. Assim, se $D=1$, o campo e a constante ν são adimensionais e λ tem dimensão 1. De maneira a simplificar o problema, vamos eliminar essas constantes fazendo a reescala $\phi \rightarrow \nu\phi$, $x^\mu \rightarrow x^\mu/(\nu\lambda)$ e $\mathcal{L} \rightarrow \lambda^2\nu^4\mathcal{L}$. Após isso, o potencial fica dado por

$$V(\phi) = \frac{1}{2}(1 - \phi^2)^2. \quad (2.42)$$

Esse potencial tem os mínimos em $\phi_{\min\pm} = \pm 1$ e máximo em $\phi_{\max} = 0$ tal que $V(\phi_{\max}) = 1/2$. A massa do campo é $m^2 = m_+^2 = m_-^2 = 4$. Esse potencial tem invariância pela transformação $\phi \rightarrow -\phi$ e portanto possui simetria Z_2 . Na Fig. 2.1 plotamos esse potencial. Para esse modelo, temos a seguinte função $W = W(\phi)$ associada:

$$W(\phi) = \phi - \frac{\phi^3}{3}. \quad (2.43)$$

Em $(1, 1)$ dimensões espaço-temporais, a equação de movimento para as soluções estáticas é

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 2\phi(\phi^2 - 1). \quad (2.44)$$

Buscamos soluções estendidas, localizadas no espaço e com energia finita. A equação acima admite duas soluções uniformes, $\phi = \pm 1$. Elas apresentam energia nula e são os vácuos clássicos do nosso modelo. Podemos usar as equações de primeira ordem para encontrar as soluções estáticas:

$$\phi_\pm(x) = \pm \tanh(x). \quad (2.45)$$

Denomina-se $\phi_+(x)$ de kink e $\phi_-(x)$ de anti-kink. Como o modelo apresenta invariância translacional, o centro da solução é arbitrário. Por simplicidade, escolhemos o centro na origem. A espessura da solução é $\delta = 2$. A densidade energia dessa solução estática é

$$\rho(x) = \text{sech}^4(x). \quad (2.46)$$

Como nossas soluções são BPS, podemos usar o fato que ΔW nos fornece a energia para facilmente encontrar $E = 4/3$. Finalmente, o potencial de estabilidade fica dado por

$$U(x) = 4 - 6\text{sech}^2(x), \quad (2.47)$$

que é conhecido como Pöschl-Teller modificado e pode ser visto na Fig. 2.1. Seu espectro de energia dos estados ligados é $\omega_n^2 = n(4-n)$, com $n = 0, 1$ [30]. Vemos que o modo zero,

$$\eta_0(x) = \text{sech}^2(x), \quad (2.48)$$

é o de menor energia e portanto o modelo ϕ^4 é estável sob ínfimas perturbações do campo.

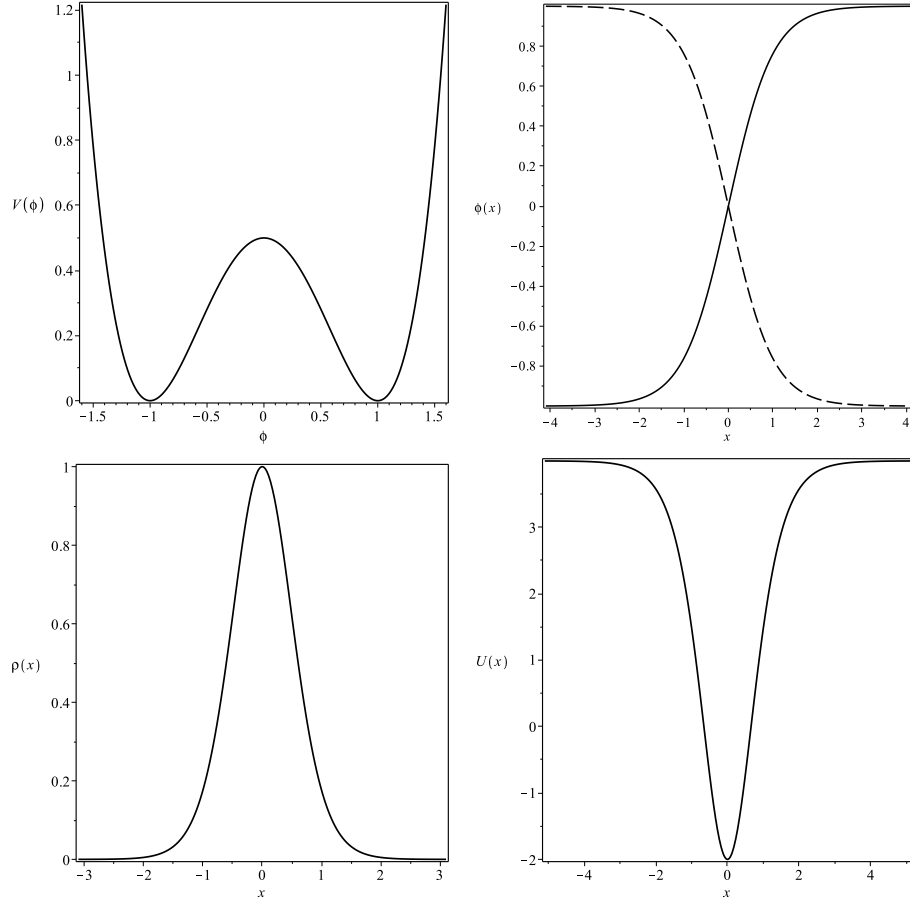


Figura 2.1 O potencial do modelo ϕ^4 cujo potencial é dado em Eq. (2.42) (esquerda superior), sua solução (direita superior, em que o kink $\phi_+(x)$ é a linha sólida e o anti-kink $\phi_-(x)$ é a linha tracejada), sua densidade de energia (esquerda inferior) e seu potencial de estabilidade (direita inferior).

2.1.4.2 Modelo seno-Gordon

Introduzido em [31] por Rubinstein, o modelo seno-Gordon é descrito pelo potencial

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \sin^2(\phi), \quad (2.49)$$

tal que $W(\phi) = -\cos(\phi)$. Podemos encontrar o gráfico desse potencial na Fig. 2.2. Note que esse potencial possui uma família de mínimos, que estão em $\phi_{\min_k} = k\pi$, onde k é um número inteiro. Os pontos de máximo são $\phi_{\max_k} = (2k-1)\pi/2$, tais que $V(\phi_{\max_k}) = 1/2$. A equação de movimento para as soluções estáticas é

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \sin(\phi) \cos(\phi). \quad (2.50)$$

Existem infinitos setores topológicos equivalentes. No setor $\phi_{\min_0} \leftrightarrow \phi_{\min_1}$, por exemplo, encontramos a seguinte solução

$$\phi^\pm(x) = 2 \arctan(e^{\pm x}). \quad (2.51)$$

Novamente, usando o formalismo BPS encontramos facilmente que a energia dessa solução é: $E = 2$. Podemos escrever a densidade de energia

$$\rho(x) = \text{sech}^2(x), \quad (2.52)$$

bem como o potencial de estabilidade:

$$U(x) = 1 - 2\operatorname{sech}^2(x), \quad (2.53)$$

que admite apenas um estado ligado, o modo zero, dado por

$$\eta_0(x) = \sqrt{\frac{1}{2}} \operatorname{sech}(x). \quad (2.54)$$

Na Fig. 2.2, estão os gráficos da solução, da densidade de energia e do potencial de estabilidade.

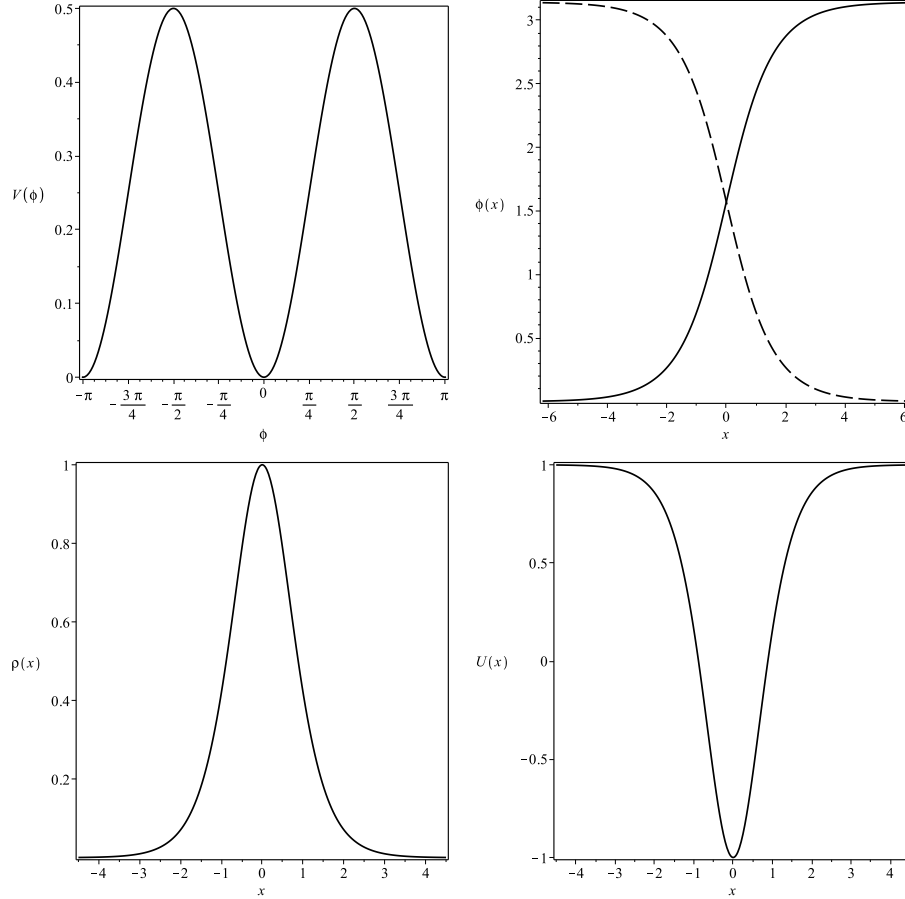


Figura 2.2 O potencial do modelo seno-Gordon como na Eq. (2.49) (esquerda superior), sua solução (direita superior, em que o kink $\phi^+(x)$ é a linha sólida e o anti-kink $\phi^-(x)$ é a linha tracejada), sua densidade de energia (esquerda inferior) e seu potencial de estabilidade (direita inferior).

2.1.5 Exemplos de Lumps

2.1.5.1 Modelo ϕ^3

Partimos do potencial

$$V(\phi) = 2\phi^2(1 - \phi). \quad (2.55)$$

A equação de movimento para as soluções estáticas é:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 2\phi(2 - 3\phi), \quad (2.56)$$

que possui duas soluções uniformes: $\phi_{\min} = 0$, que é um ponto de mínimo, e $\phi_{\max} = 2/3$, que é um ponto de máximo, ambos locais. A massa do mínimo é $m^2 = 4$. As soluções estáticas podem ser encontradas resolvendo a equação de primeira ordem (2.13). O lump então fica

$$\phi(x) = \text{sech}^2(x), \quad (2.57)$$

onde escolhemos, por simplicidade, seu centro na origem. A densidade de energia é

$$\rho(x) = 4 \text{sech}^4(x) \tanh^2(x), \quad (2.58)$$

que tem dois picos simétricos em $x_{\max} = \pm \text{arctanh}(1/\sqrt{3})$. Integrando $\rho(x)$ em todo o espaço, encontramos que a energia é $E = 4/3$. Podemos ainda encontrar o potencial de estabilidade:

$$U(x) = 4 - 12 \text{sech}^2(x) \quad (2.59)$$

que, embora seja do tipo Pöschl-Teller modificado, como no modelo ϕ^4 , aqui ele admite autovalor negativo devido aos valores de seus coeficientes [30]. Portanto, o lump do potencial ϕ^3 é instável sob pequenas perturbações. Na Fig. 2.3, plotamos os gráficos das funções previamente calculadas.

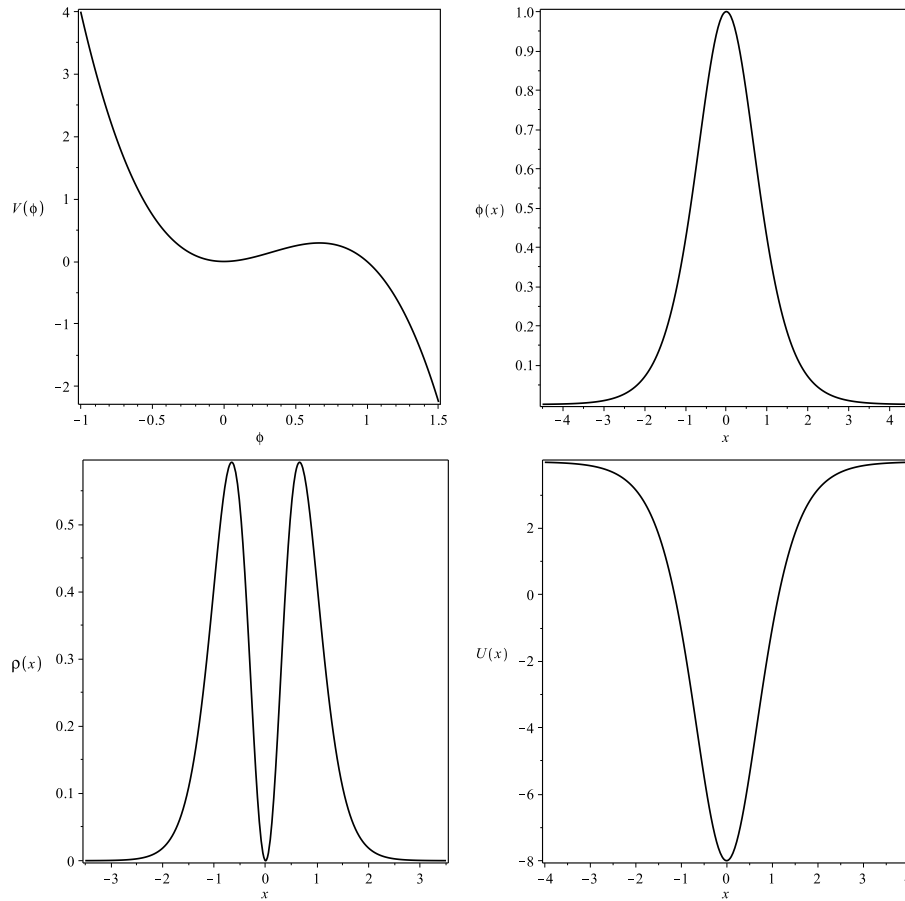


Figura 2.3 O potencial do modelo ϕ^3 como na Eq. (2.55) (esquerda superior), sua solução (direita superior), sua densidade de energia (esquerda inferior) e seu potencial de estabilidade (direita inferior).

2.1.5.2 Modelo ϕ^4 invertido

Podemos ainda considerar outro potencial, parecido com o da Eq. (2.42), porém invertido:

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2(1 - \phi^2), \quad (2.60)$$

como pode ser visto na Fig. 2.4. Esse potencial possui um mínimo local em $\phi_{\min} = 0$ e dois máximos em $\phi_{\max\pm} = \pm 1/\sqrt{2}$. A massa é dada pela expressão $m^2 = 1$. Esses pontos são soluções uniformes da seguinte equação de movimento para as soluções estáticas:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \phi(1 - 2\phi^2). \quad (2.61)$$

Novamente, podemos usar a Eq. (2.13) para encontrarmos o lump

$$\phi_{\pm}(x) = \pm \operatorname{sech}(x), \quad (2.62)$$

o qual, por simplicidade, centramos na origem. A densidade de energia fica

$$\rho(x) = \operatorname{sech}^2(x) \tanh^2(x), \quad (2.63)$$

que ao ser integrada em todo espaço fornece energia $E = 2/3$. Essa densidade de energia é nula no centro e possui dois picos em $x = \pm \operatorname{arctanh}(1/\sqrt{2})$. Podemos encontrar o potencial de estabilidade

$$U(x) = 1 - 6\operatorname{sech}^2(x), \quad (2.64)$$

que apresenta autovalor negativo em seu espectro. Logo, o lump do ϕ^4 invertido é instável sob pequenas perturbações. Na Fig. 2.4, plotamos a solução ϕ_+ , a densidade de energia e o potencial de estabilidade

2.2 Modelo de dois campos escalares reais

A fim de estudar modelos com dois campos escalares reais, ϕ e χ , introduzimos a seguinte densidade lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi + \partial_{\mu}\chi\partial^{\mu}\chi - V(\phi, \chi), \quad (2.65)$$

onde $V(\phi, \chi)$ é o potencial. Nesse caso, o tensor energia momento é

$$T_{\mu\nu} = \partial_{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi + \partial_{\mu}\chi\partial_{\nu}\chi - \eta_{\mu\nu}\mathcal{L}. \quad (2.66)$$

Em (1,1) dimensões, as equações de movimento são:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0 \quad (2.67a)$$

e

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\chi}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial\chi} = 0. \quad (2.67b)$$

Para soluções estáticas, temos

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{\partial V}{\partial\phi} \quad (2.68a)$$

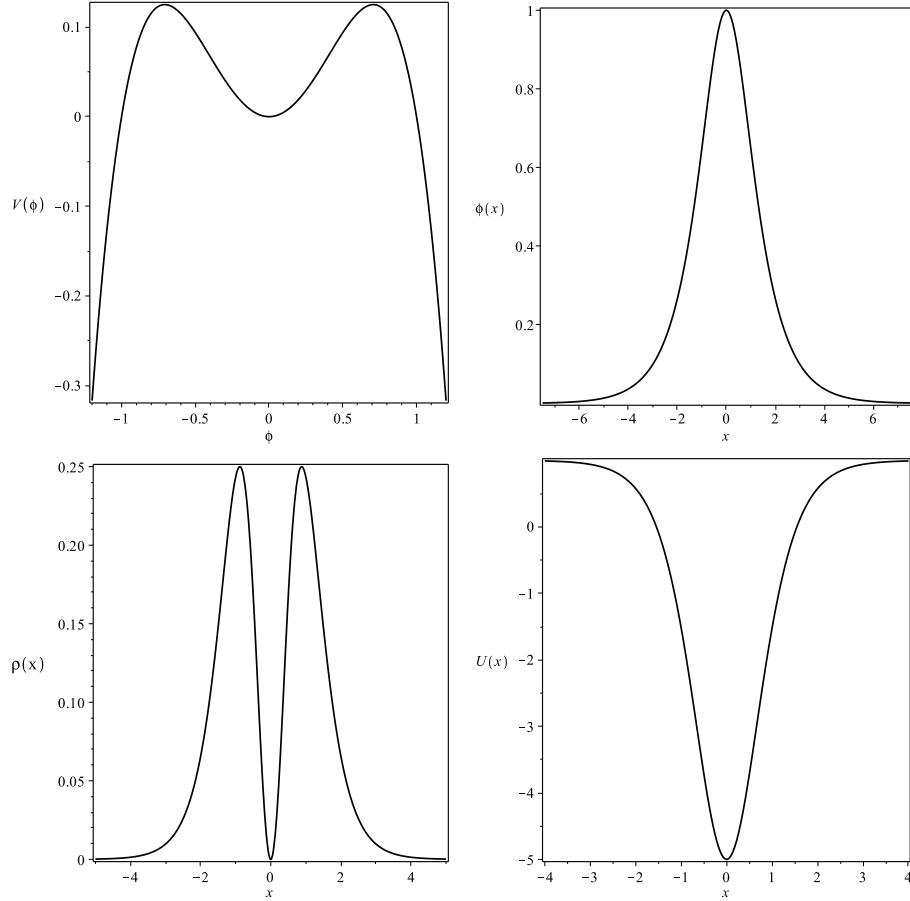


Figura 2.4 O potencial do modelo ϕ^4 invertido como na Eq. (2.60) (esquerda superior), sua solução ϕ_+ (direita superior), sua densidade de energia (esquerda inferior) e seu potencial de estabilidade (direita inferior).

e

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} = \frac{\partial V}{\partial \chi}. \quad (2.68b)$$

O fato de analisarmos soluções estáticas simplifica bastante o problema, já que as equações diferenciais parciais se tornam ordinárias. Todavia, o sistema de equações, em geral, é não-linear e acoplado em ϕ e χ .

Vale salientar que nesse caso não é possível obter duas equações de primeira ordem na forma da Eq. (2.13). Para entender o que ocorre, podemos multiplicar as Eqs. (2.68a) e (2.68b) por $d\phi/dx$ e $d\chi/dx$ respectivamente. Em seguida, ao somá-las e integrá-las com respeito a x , obtemos

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 = V(\phi, \chi) + c, \quad (2.69)$$

onde c é uma constante de integração. Note que essa equação, embora seja de primeira ordem, não traz consigo toda a informação sobre o sistema. Precisariamos de outra equação de primeira ordem para que isso ocorresse. Portanto, ela é um vínculo. Em [30], podemos encontrar uma discussão acerca dessa constante c , onde é interpretada como uma pressão e, assim, a equação de primeira ordem é vista como um vínculo de pressão para o sistema.

2.2.1 Método BPS

Como visto anteriormente, não podemos encontrar equações de primeira ordem que definam completamente um modelo de dois campos. O formalismo que nos permite encontrar essas equações é o BPS [24] [25], fazendo o uso da minimização da energia. O tensor energia-momento nos permite calcular a energia:

$$E = \int dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 + V(\phi, \chi) \right]. \quad (2.70)$$

Agora, vamos introduzir uma função $W = W(\phi, \chi)$, semelhante ao que fizemos para o caso de modelos de um campo escalar. Já estamos interessados em minimizar a energia, é conveniente escrevê-la em termos da soma de termos quadráticos:

$$\begin{aligned} E = & \frac{1}{2} \int dx \left(\frac{d\phi}{dx} \mp \frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 + \frac{1}{2} \int dx \left(\frac{d\chi}{dx} \mp \frac{\partial W}{\partial \chi} \right)^2 \\ & + \int dx \left[V(\phi, \chi) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial \chi} \right)^2 \right] \\ & \pm \int dx \frac{dW}{dx}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Se o potencial tem a forma

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial \chi} \right)^2, \quad (2.72)$$

a energia fica

$$E = \frac{1}{2} \int dx \left(\frac{d\phi}{dx} \mp \frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 + \frac{1}{2} \int dx \left(\frac{d\chi}{dx} \mp \frac{\partial W}{\partial \chi} \right)^2 + E_B, \quad (2.73)$$

onde

$$E_B = |\Delta W| = |W(\phi(\infty), \chi(\infty)) - W(\phi(-\infty), \chi(-\infty))| \quad (2.74)$$

é a energia de Bogomol'nyi. Pela expressão acima, vemos que E_B só depende da diferença de W nos valores assintóticos dos campos. Quando minimizamos a energia, vemos que $E = E_B$ e obtemos duas equações de primeira ordem:

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \frac{\partial W}{\partial \phi} \quad (2.75a)$$

e

$$\frac{d\chi}{dx} = \pm \frac{\partial W}{\partial \chi}. \quad (2.75b)$$

Note que esse método nos permite calcular a energia de um dado setor topológico sem que saibamos a forma explícita da solução. Chamamos os setores topológicos em que $\Delta W \neq 0$ de setores BPS e suas soluções de soluções BPS; caso contrário, se $\Delta W = 0$, chamamos os setores e soluções de não BPS. As configurações BPS possuem energia mínima e, portanto, espera-se que sejam estáveis. Contudo, nada podemos afirmar para os setores não BPS.

De maneira a encontrar a equação que descreve as órbitas no espaço dos campos, podemos usar as equações de primeira ordem e eliminar a dependência em x para obter

$$W_\chi d\phi - W_\phi d\chi = 0. \quad (2.76)$$

Para resolver essa equação analiticamente, podemos, usando uma nova função $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\phi, \chi)$, tentar escrevê-la na forma $d\mathcal{F}(\phi, \chi) = 0$, isto é, na forma de uma diferencial exata. Da teoria de equações diferenciais, sabe-se que a diferencial presente em Eq. (2.76) é exata se, e somente se,

$$W_{\chi\chi} = -W_{\phi\phi}. \quad (2.77)$$

Dessa forma, vemos que se o laplaciano de W for nulo no espaço dos campos, então a diferencial é exata. Portanto, se W é uma função harmônica no espaço dos campos, então é possível escrevê-la na forma de uma diferencial exata. De maneira mais geral, se a equação acima for satisfeita, podemos encontrar sua integral primeira $\mathcal{F}(\phi, \chi)$ pelas equações

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi} = W_\chi \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \chi} = -W_\phi. \quad (2.78)$$

Após isso, temos as órbitas, que são descritas no espaço dos campos pela equação $\mathcal{F}(\phi, \chi) = 0$. Então, podemos desacoplar as equações de primeira ordem.

Infelizmente, a Eq. (2.77) é muito restritiva e geralmente as funções $W = W(\phi)$ não a obedecem. Nesses casos, existe o método do fator integrante, que consiste em multiplicar a Eq. (2.76) por uma função arbitrária $\mathcal{I} = \mathcal{I}(\phi, \chi)$, chamada de fator integrante, tal que a condição de diferencial exata seja obedecida na seguinte forma:

$$\frac{\partial(\mathcal{I}W_\chi)}{\partial \chi} = -\frac{\partial(\mathcal{I}W_\phi)}{\partial \phi}. \quad (2.79)$$

O problema do fator integrante é que nem sempre é possível obtê-lo analiticamente. Por isso, o método das órbitas oferece uma alternativa interessante. Em [33], ele foi resumido a três passos:

- I) Selecione um setor BPS, ou seja, escolha dois mínimos (ϕ_a, χ_a) e (ϕ_b, χ_b) tais que $W(\phi_a, \chi_a) \neq W(\phi_b, \chi_b)$;
- II) Escolha sua função \mathcal{F} que especifique sua órbita desejada pela equação $\mathcal{F}(\phi, \chi) = 0$, a qual deve ser satisfeita nos mínimos;
- III) Teste se a função que define a órbita escolhida é uma diferencial exata, $d\mathcal{F} = 0$, via

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi} W_\phi + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \chi} W_\chi = 0. \quad (2.80)$$

Se a órbita escolhida atende às condições presentes nos três passos, então ela pode ser usada para desacoplar as equações de primeira ordem.

2.2.2 Estabilidade Linear

O procedimento é análogo ao feito no estudo de modelos de um campo: perturbaremos fracamente as soluções estáticas, isto é,

$$\phi(x, t) = \phi(x) + \eta(x, t) \quad \text{e} \quad \chi(x, t) = \chi(x) + \varepsilon(x, t), \quad (2.81)$$

onde $\eta(x, t)$ e $\varepsilon(x, t)$ são as flutuações. Podemos separar as variáveis x e t nas flutuações por

$$\begin{bmatrix} \eta(x, t) \\ \varepsilon(x, t) \end{bmatrix} = \sum_n \begin{bmatrix} \eta_n(x) \\ \varepsilon_n(x) \end{bmatrix} \cos(\omega_n t). \quad (2.82)$$

Usando as equações de movimento e desprezando os termos de segunda ordem em diante nas flutuações, encontramos uma equação do tipo Schrödinger, $H\Psi_n(x) = \omega_n^2 \Psi_n(x)$, com

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + \begin{bmatrix} V_{\phi\phi} & V_{\phi\chi} \\ V_{\chi\phi} & V_{\chi\chi} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Psi_n(x) = \begin{bmatrix} \eta_n(x) \\ \varepsilon_n(x) \end{bmatrix}. \quad (2.83)$$

Como feito para modelos de um campo escalar, é possível introduzir os operadores de primeira ordem [34]

$$S_{\pm} = \begin{bmatrix} -d/dx \pm W_{\phi\phi} & \pm W_{\phi\chi} \\ \pm W_{\chi\phi} & -d/dx \pm W_{\chi\chi} \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

que originam

$$H_{\pm} = S_{\pm}^{\dagger} S_{\pm}. \quad (2.85)$$

Portanto, vemos que o H presente em Eq. (2.83) é o H_+ , o parceiro supersimétrico de H_- . Como H é um operador não-negativo, seus autovalores também são não-negativos. Logo, como no caso de um campo, as soluções BPS são estáveis. Em [30], pode-se ver que o resultado acima, válido para dois campos, pode ser generalizado para o caso de N campos.

2.2.3 Modelo BNRT

O modelo que será estudado a seguir foi introduzido em Refs. [35] e [36]. Em [37] e [38] podemos encontrar uma investigação com mais detalhes desse modelo. Em particular, o modelo recebeu o nome BNRT no artigo [38]. Partimos de

$$W(\phi, \chi) = \phi - \frac{1}{3}\phi^3 - r\phi\chi^2, \quad (2.86)$$

onde r é um parâmetro real não-negativo que controla a interação entre os campos. O potencial, então, é

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2}(1 - \phi^2 - r\chi^2)^2 + 2(r\chi\phi)^2. \quad (2.87)$$

Na Fig. 2.5, podemos ver o gráfico do potencial (2.87). Esse potencial é par em cada um dos campos, ou seja, $V(-\phi, \chi) = V(\phi, -\chi) = V(\phi, \chi)$. Assim, dizemos que ele tem simetria $Z_2 \times Z_2$. Estamos interessados em encontrar as soluções estáticas. As equações de movimento para esse caso são

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 2\phi [r(2r+1)\chi^2 + \phi^2 - 1], \quad (2.88a)$$

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} = 2r\chi [(2r+1)\phi^2 + r\chi^2 - 1]. \quad (2.88b)$$

O potencial tem mínimos que são os pontos críticos da função $W = W(\phi, \chi)$. Para nosso modelo, encontramos quatro pontos de mínimo na forma $v = (\phi_m, \chi_m)$:

$$v_{h\pm} = (\pm 1, 0) \quad \text{e} \quad v_{v\pm} = (0, \pm \sqrt{1/r}). \quad (2.89)$$

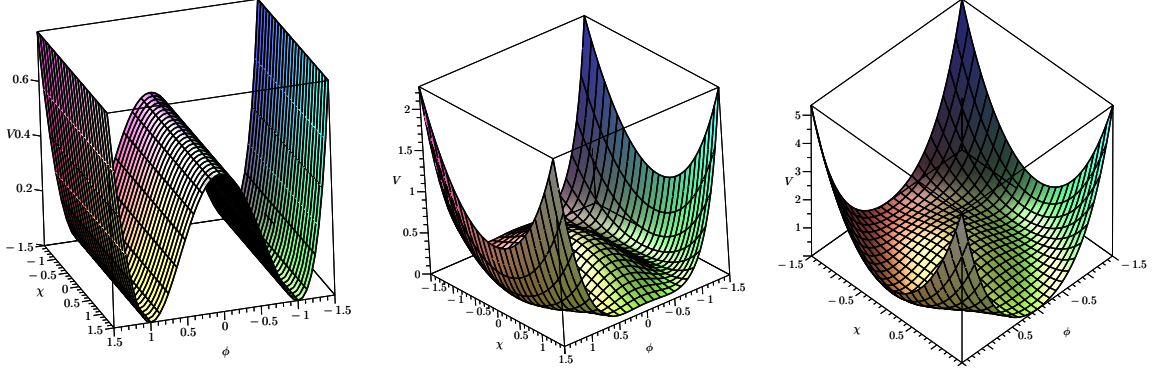


Figura 2.5 O potencial do modelo BNRT como na Eq. (2.87) para $r = 0$ (esquerda), $r = 0.25$ (centro) e $r = 0.5$ (direita).

Podemos identificar $\binom{4}{2} = 6$ setores topológicos conectando cada um dos mínimos. Temos ainda que $W(1, 0) = -W(-1, 0) = 2/3$, $W(0, 1/\sqrt{r}) = W(0, -1/\sqrt{r}) = 0$. Portanto, há cinco setores BPS, dos quais um tem energia $E_{v_{h-} \rightarrow v_{h+}}^{BPS} = 4/3$ e os quatro restantes são degenerados com energia $E^{BPS} = 2/3$. O setor restante, $v_{v-} \rightarrow v_{v+}$, é não BPS e sua energia só pode ser obtida quando sua solução for obtida explicitamente.

As equações de primeira ordem são

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm(1 - \phi^2 - r\chi^2), \quad (2.90a)$$

$$\frac{d\chi}{dx} = \mp 2r\phi\chi. \quad (2.90b)$$

Como vimos, as duas equações de primeira ordem nos fornecem uma equação diferencial cuja solução é a equação de órbitas no espaço dos campos. Usando o método do fator integrante explicado anteriormente, com $\mathcal{J} = \chi^{-1-1/r}$, é possível encontrar a seguinte órbita geral

$$\phi^2 = \frac{r}{2r-1}\chi^2 + C\chi^{\frac{1}{r}} + 1, \quad (2.91)$$

que desacopla os campos e nos permite encontrar todas as soluções BPS. Em [38], vemos, para um dado valor de C , soluções gerais para valores de r .

Iniciemos com os casos mais simples. No caso da linha reta $\chi = 0$ (soluções do tipo um campo), encontramos a equação de movimento do ϕ^4 usual:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -2\phi(1 - \phi^2). \quad (2.92)$$

Então, temos dois pares de soluções:

$$\phi(x) = \pm \tanh(x) \text{ e } \chi(x) = 0, \quad (2.93)$$

que conectam o setor $v_{h-} \leftrightarrow v_{h+}$ e têm energia $E_{v_{h+} \rightarrow v_{h-}}^{BPS} = 4/3$ como visto anteriormente.

Podemos também tomar $\phi = 0$ nas equações de movimento para encontrar

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} = -2r\chi(1 - r\chi^2). \quad (2.94)$$

Então, os pares de soluções são

$$\phi(x) = 0 \quad \text{e} \quad \chi(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{r}} \tanh(\sqrt{r}x), \quad (2.95)$$

com energia $E^{\text{não BPS}} = 4/(3\sqrt{r})$. Vale salientar que essas soluções são do tipo não BPS, pois elas não satisfazem as equações de primeira ordem: se fizermos $\phi = 0$ nas equações de primeira ordem, encontramos necessariamente $\chi = \pm 1/\sqrt{r}$, que são soluções triviais. Portanto, não há uma órbita reta que conecte os mínimos v_{v-} e v_{v+} descrevendo estados BPS nesse modelo. Note que a energia das soluções do setor não BPS dependem de r e, no caso em que $r = 1$, ela assume mesmo valor da energia do setor $v_{h+} \rightarrow v_{h-}$.

Analisemos agora as órbitas elípticas que conectam os mínimos $v_{h+} \rightarrow v_{h-}$. Na equação (2.91), podemos tomar $C = 0$ para obter

$$\phi^2 + \frac{r}{1-2r} \chi^2 = 1, \quad (2.96)$$

que de fato descreve uma elipse no plano ϕ, χ . Podemos usá-la para desacoplar as equações de primeira ordem e obter as seguintes soluções do tipo dois campos

$$\phi(x) = \pm \tanh(2rx) \quad \text{e} \quad \chi(x) = \pm \sqrt{\frac{1-2r}{r}} \operatorname{sech}(2rx), \quad (2.97)$$

com $0 < r < 1/2$. Vemos que o campo χ assume seu valor máximo no centro do kink, em $x = 0$. No limite $r \rightarrow 1/2$, vemos que a solução tende à solução de um campo. Na Fig. 2.6, podemos ver os gráficos das soluções.

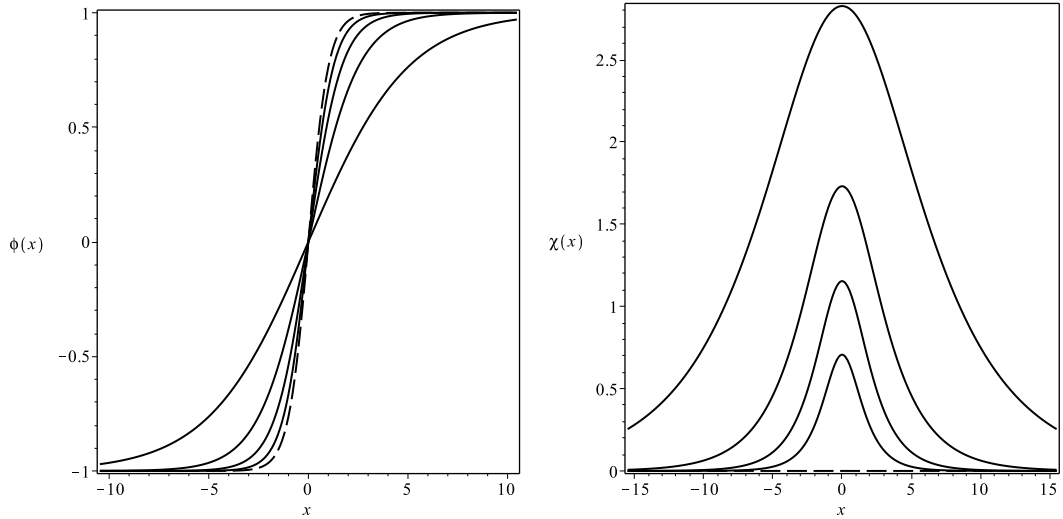


Figura 2.6 As soluções $\phi(x)$ (esquerda) e $\chi(x)$ (direita) para valores de r tal que $0 < r < 1/2$. As linhas tracejadas indicam o caso limite $r \rightarrow 1/2$, que fornece a solução do tipo um campo.

A densidade de energia apresenta uma expressão muito grande, por isso não a escreveremos. Seu gráfico pode ser visto na Fig. 2.7. Observa-se que para $0.25 \leq r < 0.5$ a densidade de energia tem um único pico. Contudo, para $r \approx r_c = 0.25$, surge um platô. No intervalo $0 < r < r_c$, a densidade de energia passa a exibir dois picos.

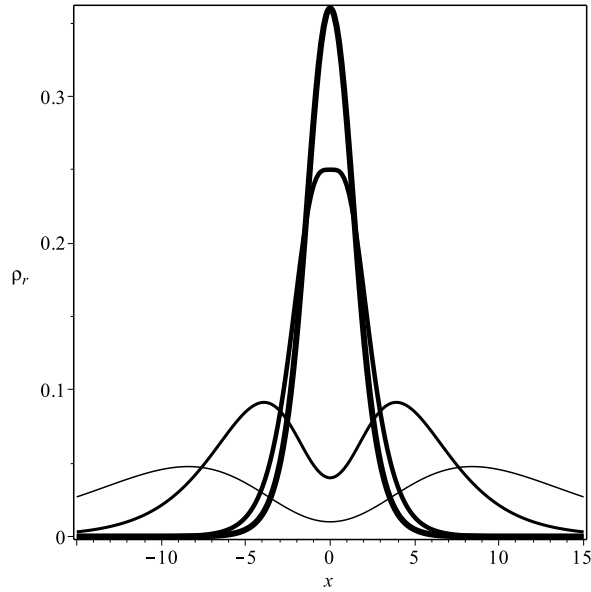


Figura 2.7 A densidade de energia para as soluções presentes na Eq. (2.97). Aqui, usamos $r = 0.05, 0.1, 0.25$ e 0.3 . A espessura da linha aumenta com r .

CAPÍTULO 3

Compactons

Em 1993, Rosenau e Hyman introduziram na Ref. [39] compactons em modelos que possuem não linearidade e dispersão não linear. Enquanto kinks só atingem os vácuos do potencial quando $x \rightarrow \pm\infty$, compactons são soluções que atingem os valores de vácuo do potencial para valores finitos de x . Contudo, como não há uma maneira de incluir dispersão não linear em sistemas relativísticos governados pela dinâmica padrão, compactons são difíceis de se encontrar nas teorias de campo usuais. Assim, abordaremos brevemente modelos com dinâmica generalizada. Mais à frente, nos capítulos finais, veremos um procedimento que criamos para fazer a transição de kinks para compactons em teorias de campo com dinâmica padrão.

3.1 Modelos com dinâmica generalizada

Como fizemos no capítulo anterior, estudaremos campos escalares no espaço de Minkowski. Em (D,1) dimensões espaço-temporais, o tensor métrico é tal que $\eta_{00} = 1$, $\eta_{11} = \eta_{22} = \dots = \eta_{DD} = -1$ e $\eta_{\mu\nu} = 0$ se $\mu \neq \nu$. Escreveremos agora a ação associada a um único campo escalar real $\phi = \phi(x^\mu)$ como

$$S = \int d^{D+1}x \mathcal{L}(\phi, X), \quad (3.1)$$

onde $X = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$ é o termo que contém a dinâmica padrão e $\partial_\mu\phi = \partial\phi/\partial x^\mu$. Nesse caso, as equações de movimento são

$$\partial_\mu(\mathcal{L}_X\partial^\mu\phi) - \mathcal{L}_\phi = 0. \quad (3.2)$$

O tensor energia-momento é dado por

$$T_{\mu\nu} = \mathcal{L}_X\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \eta_{\mu\nu}\mathcal{L}. \quad (3.3)$$

Em componentes, temos:

$$T_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \dot{\phi}^2\mathcal{L}_X - \mathcal{L} & \dot{\phi}\phi'\mathcal{L}_X \\ \dot{\phi}\phi'\mathcal{L}_X & \phi'^2\mathcal{L}_X + \mathcal{L} \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

onde $\dot{\phi} = \partial\phi/\partial t$ e $\phi' = \partial\phi/\partial x$. Para o caso de um campo estático unidimensional, temos $X = -\phi'^2/2$, e a equação de movimento (3.2) se resume a

$$\phi'^2\phi''\mathcal{L}_{XX} - \phi'^2\mathcal{L}_{X\phi} - \phi''\mathcal{L}_X - \mathcal{L}_\phi = 0. \quad (3.5)$$

Além disso, do tensor energia momento (3.4), a densidade de energia fica dada simplesmente por $\rho = T_{00} = -\mathcal{L}$. Assim, ao modificarmos a dinâmica, devemos tomar cuidado

com o sinal de \mathcal{L} para que a densidade de energia seja não-negativa. Multiplicando a equação acima por ϕ' e fazendo uma integração com respeito à x , encontramos a equação de primeira ordem $\phi'^2 \mathcal{L}_X + \mathcal{L} = c$, onde c é uma constante de integração. O primeiro membro da equação acima corresponde exatamente à componente T_{11} do tensor energia-momento (3.4). Portanto, temos que T_{11} é constante. A condição de estresse nulo requer $c = 0$. Assim, temos

$$\phi'^2 \mathcal{L}_X + \mathcal{L} = 0. \quad (3.6)$$

Note que agora a densidade lagrangiana não tem uma forma específica e, portanto, é apenas uma função arbitrária de X e de ϕ . Assim, é possível estudar casos em que a dinâmica e o potencial estejam acoplados, como por exemplo, modelos com dinâmica taquiônica. Na Ref. [40] podemos encontrar alguns exemplos de defeitos globais em modelos com dinâmica generalizada.

É possível, ainda, introduzir um formalismo de primeira ordem usando uma função $W = W(\phi)$, tal que a equação de primeira ordem seja $\phi' \mathcal{L}_X = W_\phi$ e a densidade de energia seja dada simplesmente por $\rho = dW/dx$. Não faremos maiores detalhes aqui. Esse estudo pode ser visto na Ref. [41], onde também se analisa a estabilidade linear das soluções estáticas.

3.1.1 Modelos com dinâmica quártica

Consideraremos uma modificação tal que a dinâmica e o potencial do modelo estejam desacoplados:

$$\mathcal{L}(\phi, X) = -X^2 - V(\phi), \quad (3.7)$$

onde, novamente, $X = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$ e V é o potencial. O sinal negativo que aparece no termo cinético é importante para que a energia seja não-negativa. A equação de movimento para soluções estáticas unidimensionais (3.5) é

$$3\phi'^2 \phi'' = V_\phi \quad (3.8)$$

e o tensor energia momento (3.3) fica

$$T_{\mu\nu} = -2X \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \eta_{\mu\nu} [X^2 + V(\phi)], \quad (3.9)$$

onde $X = -\phi'^2/2$. Em componentes, temos

$$T_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\phi'^4 + V & 0 \\ 0 & \frac{3}{4}\phi'^4 - V \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Nesse caso, a equação de primeira ordem (3.6) assume a forma

$$\frac{3}{4}\phi'^4 = V(\phi), \quad (3.11)$$

na qual tomamos a constante de integração igual a zero para, como no caso padrão, evitarmos divergências na energia, obedecendo às mesmas condições de contorno presente nas Eqs. (2.12a) e (2.12b).

Em alguns casos, podemos lançar mão de uma função $W = W(\phi)$ tal que o potencial admita a forma

$$V(\phi) = \frac{3}{4} W_\phi^{4/3}. \quad (3.12)$$

Nesse caso, a equação de primeira ordem (3.11) fica

$$\phi' = W_\phi^{1/3} \quad (3.13)$$

e a energia da solução fica dada por $E = |W(\phi(x \rightarrow \infty)) - W(\phi(x \rightarrow -\infty))|$.

A Eq. (3.11) apresenta uma característica interessante: se olharmos para a potência de ϕ' , podemos tomar um potencial que nos forneça a mesma equação de primeira ordem obtida para modelos com a dinâmica padrão. Por exemplo, tomemos a seguinte versão quadrática do modelo ϕ^4 apresentado no capítulo anterior:

$$V(\phi) = \frac{3}{4} (1 - \phi^2)^4. \quad (3.14)$$

Essa escolha nos leva a seguinte equação de primeira ordem:

$$\phi'^2 = (1 - \phi^2)^2, \quad (3.15)$$

que é exatamente a mesma equação encontrada na seção do ϕ^4 do capítulo anterior. De maneira mais geral, se tomarmos $V(\phi) = 3\tilde{V}^2(\phi)$, onde \tilde{V} é o potencial usado na teoria padrão, encontramos

$$\frac{1}{2}\phi'^2 = \tilde{V}(\phi), \quad (3.16)$$

que é equação de primeira ordem obtida anteriormente para o caso padrão. Ou seja, apesar de as equações serem altamente não lineares em ambos os modelos, existe uma conexão entre elas. Isso pode ser mostrado para uma dinâmica modificada com uma potência qualquer, não apenas 2.

3.1.1.1 Estabilidade Linear

Também é possível estudar a estabilidade linear da solução estática. O estudo é semelhante ao realizado no capítulo anterior e pode ser feito introduzindo pequenas perturbações $\eta(x, t)$ no campo, tal que

$$\phi(x, t) = \phi(x) + \eta(x, t). \quad (3.17)$$

Supondo que as flutuações sejam dadas por $\eta(x, t) = \sum_n \eta_n(x) \cos(\omega_n t)$, podemos substituir o campo acima na equação de movimento dependente do tempo. Contudo, nesse cenário da lagrangiana presente em Eq. (3.7), é preciso realizar a mudança de variáveis $x \rightarrow z$ e $\eta_n \rightarrow u_n$, tal que

$$x = \frac{z}{\sqrt{3}} \quad \text{e} \quad \eta_n = \frac{u_n}{3^{1/4}\phi'} \quad (3.18)$$

para chegarmos à uma equação de estabilidade com a mesma forma da equação de Schrödinger $Hu_n(z) = \omega_n^2 u_n$, onde o análogo ao hamiltoniano H é

$$H = -\frac{d^2}{dz^2} + U(z). \quad (3.19)$$

A função $U(z)$ é denominada potencial de estabilidade (ou do tipo Schrödinger) e é dada por

$$U(z) = 2W_\phi^{-1/3} W_{\phi\phi\phi}. \quad (3.20)$$

É possível fatorizar H na forma $H = S^\dagger S$, com o operador S definido por

$$S = -\frac{d}{dz} + \frac{2\sqrt{3}}{3}W_\phi^{-2/3}W_{\phi\phi}. \quad (3.21)$$

Dessa forma, provamos que não há estados ligados com autovalores negativos na equação de estabilidade e portanto a solução é estável sob pequenas flutuações do campo.

3.2 Exemplos de Compactons

Como já sabemos, existe uma classe especial de potenciais que nos fornecem as mesmas equações de movimento de uma teoria de campos usual para uma lagrangiana com a forma presente na Eq. (3.7). Contudo, como iremos ver, um tipo diferente de soluções, os compactons, surgem nesse cenário de dinâmica quártica ao analisarmos alguns potenciais previamente estudados na teoria padrão sem modificá-los.

3.2.1 Modelo ϕ^4

Como sabemos, o potencial do modelo ϕ^4 , já estudado no capítulo 2, tem a forma

$$V(\phi) = \frac{3}{4}(1 - \phi^2)^2. \quad (3.22)$$

O fator numérico $3/4$ foi introduzido por conveniência, de maneira a tornar as equações mais simples. Assim, o valor máximo do potencial agora é $V_{max} = 3/4$. Podemos escrever ainda que

$$W(\phi) = \phi\sqrt{1 - \phi^2} \left(\frac{5}{8} - \frac{1}{4}\phi^2 \right) + \frac{3}{8}\arcsin(\phi). \quad (3.23)$$

A equação de movimento fica dada por

$$\phi'^2 \phi'' = -\phi(1 - \phi^2). \quad (3.24)$$

Usando a Eq. (3.11), encontramos a solução:

$$\phi_\pm(x) = \begin{cases} \mp 1, & \text{se } x < -\pi/2; \\ \pm \sin(x), & \text{se } |x| \leq \pi/2; \\ \pm 1, & \text{se } x > \pi/2; \end{cases} \quad (3.25)$$

que está plotada na Fig. 3.1. A solução ϕ_+ é dita compacton e a ϕ_- é dita anti-compacton. Note que, embora a função acima seja definida por intervalos, tanto a solução como sua derivada são contínuas para qualquer valor real de x , inclusive em $x = \pm\pi/2$. Assim, esperamos que a densidade de energia seja contínua. De fato, a densidade de energia, que podemos ver na Fig. 3.1, é contínua:

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } |x| > \pi/2; \\ \cos^4(x), & \text{se } |x| \leq \pi/2; \end{cases} \quad (3.26)$$

Ao integrá-la, obtemos a energia $E = 3\pi/8$.

De maneira a entender claramente a diferença entre kinks e compactons, podemos analisar a Fig. 3.2, na qual plotamos ambas as soluções, bem como suas densidades de

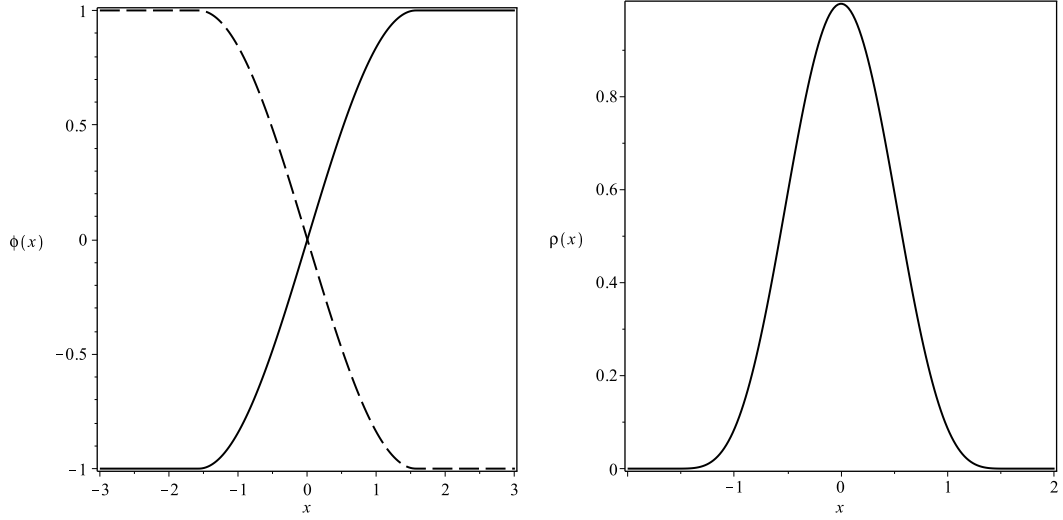


Figura 3.1 A solução do tipo compacton para o potencial do tipo ϕ^4 (esquerda) e a densidade de energia presente em Eq. (3.26) (direita). As linhas sólida e tracejada indicam o compacton e o anti-compacton, respectivamente.

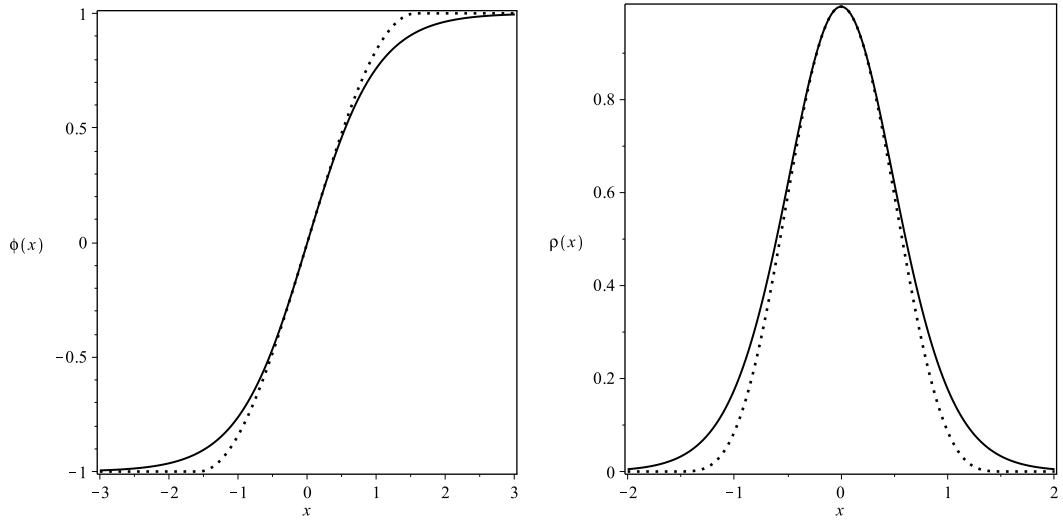


Figura 3.2 As soluções do tipo kink e compacton para o potencial do tipo ϕ^4 (esquerda) e suas respectivas densidades de energia (direita). As linhas sólida e pontilhada indicam as figuras para o kink e para o compacton, respectivamente.

energia. Com respeito às soluções, ambas são monotônicas, contínuas e conectam os mínimos do potencial. Contudo, os mínimos do potencial são atingidos de maneiras distintas: enquanto a solução tipo kink atinge os valores de vácuo apenas em $x \rightarrow \pm\infty$, um compacton o faz em valores finitos de x , no caso do modelo ϕ^4 , em $x = \pm\pi/2$. Quanto à densidade de energia, ambas têm a mesma forma. Todavia, vemos que a densidade de energia do kink se anula apenas em $x \rightarrow \pm\infty$, já a do compacton o faz em um valor finito de x , em $x = \pm\pi/2$. Vale ainda ressaltar que a espessura δx do kink não é definida de maneira única. Porém, como o compacton atinge os mínimos do potencial em valores finitos de x , sejam x_a e x_b em geral, podemos definir unicamente sua espessura como sendo o módulo da diferença entre x_a e x_b . Portanto, em nosso caso, a espessura do compacton é $\delta x = \pi$.

Por fim, podemos encontrar o potencial de estabilidade:

$$U(z) = \begin{cases} \infty, & \text{se } |z| > \frac{\pi}{2\sqrt{3}}; \\ -12 + 6\sec^2(\sqrt{3}z), & \text{se } |z| < \frac{\pi}{2\sqrt{3}}. \end{cases} \quad (3.27)$$

O potencial acima é o potencial de Pöschl-Teller que está plotado na Fig. 3.3. Ele só admite estados ligados.

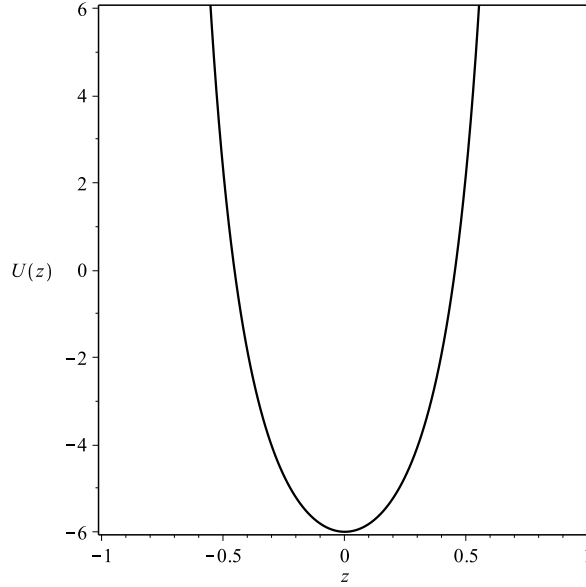


Figura 3.3 O potencial de estabilidade Pöschl-Teller, presente na Eq. (3.27).

3.2.2 Modelo seno-Gordon

Estudemos o que ocorre com o modelo do tipo seno-Gordon no cenário de dinâmica quártica, cujo potencial tem a forma:

$$V(\phi) = \frac{3}{4} \sin^2(\phi). \quad (3.28)$$

Novamente, o fator $3/4$ foi introduzido por conveniência. Como já estudamos anteriormente, esse potencial é periódico e apresenta uma família de setores, com mínimos em $\phi = \pm n\pi$, onde $n \in \mathbb{Z}$. No setor $0 \leq \phi \leq \pi$, temos

$$W(\phi) = -\frac{2}{3} \sqrt{\sin(\phi)} \cos(\phi) - \frac{\sqrt{2}}{3} \operatorname{sgn}(\cos(\phi)) \operatorname{arcsn} \left(\sqrt{1 - \sin(\phi)}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \quad (3.29)$$

onde $\operatorname{sgn}(z)$ é a função sinal de z e $\operatorname{arcsn}(z, k)$ é a inversa do seno elíptico de argumento z e módulo elíptico k . Dessa maneira, a energia desse setor pode ser exatamente calculada e é dada por $E = |\Delta W| = (\sqrt{2}/3) \operatorname{arcsn}(1, \sqrt{2}/2) \approx 1.748$.

A equação de movimento é

$$4\phi'^2 \phi'' = \sin(2\phi). \quad (3.30)$$

Podemos usar a equação de primeira ordem (3.11), para chegar à solução do tipo compacton (+) e anti-compacton (-)

$$\phi_{\pm}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } \pm x < x_1; \\ 2 \arctan \left\{ \left[\frac{\text{sn}(\pm bx, k) - (1 + \sqrt{2}) \text{cn}(\pm bx, k)}{\text{sn}(\pm bx, k) + (1 + \sqrt{2}) \text{cn}(\pm bx, k)} \right]^2 \right\}, & \text{se } x_1 < \pm x < x_2; \\ \pi, & \text{se } \pm x > x_2. \end{cases} \quad (3.31)$$

Aqui, os valores das constantes b e k são

$$b = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{4(1 + \sqrt{2})} \quad \text{e} \quad k^2 = \frac{16 + 12\sqrt{2}}{17 + 12\sqrt{2}}. \quad (3.32)$$

Usamos a notação $\text{sn}(z, k)$ e $\text{cn}(z, k)$ para indicar o seno e cosseno elíptico, respectivamente, de argumento z e módulo elíptico k . Mais detalhes sobre essas funções podem ser encontrados na literatura das funções elípticas de Jacobi, como no capítulo 16 da Ref. [42]. Finalmente, x_1 e x_2 , que definem os intervalos de validade das expressões do campo, são soluções adjacentes das equações $\text{sn}(\pm bx_{1\pm}, k) - (1 + \sqrt{2}) \text{cn}(\pm bx_{2\pm}, k) = 0$ e $\text{sn}(\pm bx_{2\pm}, k) + (1 + \sqrt{2}) \text{cn}(\pm bx_{1\pm}, k) = 0$. O sinal positivo representa caso do compacton e o negativo representa o caso do anti-compacton. Numericamente, encontramos $x_{1\pm} \approx \pm 2.622$ e $x_{2\pm} \approx \pm 7.866$.

A densidade de energia apresenta uma expressão um pouco intrincada. Por isso, não escreveremos sua expressão. Ao integrá-la numericamente, confirmamos que a energia é $E \approx 1.748$. Na Fig. 3.4, estão plotados os gráficos da solução e da densidade de energia.

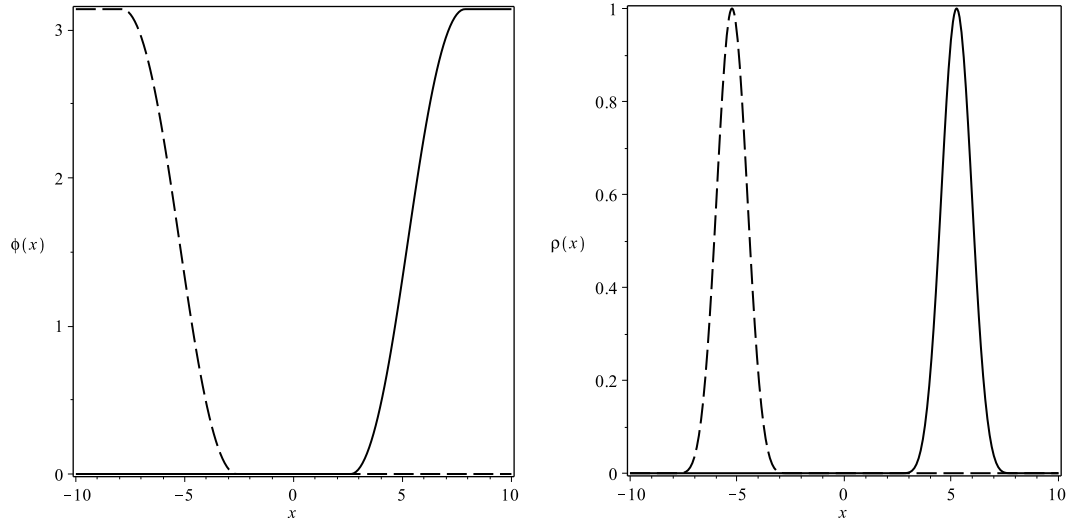


Figura 3.4 A solução do tipo compacton para o potencial do tipo seno-Gordon (esquerda) e sua respectiva densidade de energia (direita). As linhas sólida e tracejada indicam o compacton e o anti-compacton, respectivamente.

Como sabemos que $W_\phi = (4V/3)^{3/4}$, é possível reescrever a Eq. (3.20) em termos de V . Dessa maneira, após alguns cálculos, o potencial de estabilidade para a solução ϕ_+ pode ser encontrado e tem a seguinte expressão:

$$U(z) = \begin{cases} \infty, & \text{se } z < \sqrt{3}x_1 \text{ ou } z > \sqrt{3}x_2; \\ \frac{3}{4} \left\{ \frac{1 - 10\gamma^2(z, k) + \gamma^4(z, k)}{[1 + \gamma^2(z, k)]\gamma(z, k)} \right\}, & \text{se } \sqrt{3}x_1 < z < \sqrt{3}x_2; \end{cases} \quad (3.33)$$

onde $\gamma(z, k)$ é o argumento da função arco-tangente da solução presente na Eq. (3.31), porém com a mudança de variável $x = z/\sqrt{3}$. Na Fig. 3.5, vemos que esse potencial de estabilidade tem a forma de um poço infinito, com valor mínimo $U_{min} = -3$. Para obter o potencial de estabilidade associado à função ϕ_- , basta fazer a mudança de variável $z \rightarrow -z$. Para reforçar a análise sobre a estabilidade linear feita anteriormente, como o potencial seno-Gordon pode ser escrito em termos de W , a solução é estável.

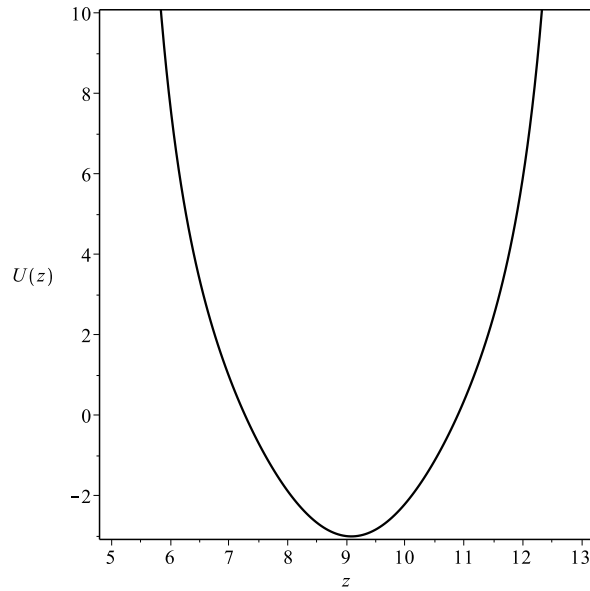


Figura 3.5 O potencial de estabilidade da Eq. (3.33).

Vórtices

Vórtices são estruturas topológicas em três dimensões espaço-temporais (2,1) e podem estar presentes em sistemas planares relativísticos. Quando considerados em três dimensões espaciais, isto é, em (3,1) dimensões espaço-temporais, os vórtices se tornam cordas que podem ser retas ou curvas.

O interesse em vórtices se dá tanto por seu aspecto matemático como por suas aplicações em física de matéria condensada, como o Efeito Hall Quântico inteiro e fracionário [43]. Abrikosov mostrou a possibilidade de soluções localizadas do tipo vórtice existirem na teoria de Ginzburg-Landau para a supercondutividade na presença de um campo magnético externo [8]. Como se sabe, pelo Efeito Meissner, supercondutores expulsam as linhas de campo magnético quando estão submetidos à uma temperatura abaixo da crítica. Em supercondutores do tipo II, há dois valores críticos para o campo magnético, sejam B_{c1} e B_{c2} . Denominemos o campo externo aplicado de B . Se $B < B_{c1}$, o material está na fase supercondutora e o campo é expulso. Contudo, se $B_{c1} < B < B_{c2}$, o campo passa a penetrar o material em algumas regiões, formando os vórtices de Abrikosov nas regiões normais (não supercondutoras). Se $B > B_{c2}$, o material sai da fase supercondutora. A teoria de Ginzburg-Landau é não relativística. O modelo relativístico proposto é o Higgs abeliano que admite soluções do tipo vórtices estáticas e puramente magnéticas (eletricamente descarregadas). Vórtices em teorias de campos são de dois tipos, os quais serão estudados a seguir:

- Globais, em que há apenas o campo escalar complexo φ ;
- Locais, em que a teoria possui um campo escalar complexo φ acoplado a um campo de gauge A_μ abeliano.

Primeiramente apresentaremos o modelo de vórtice global e verificaremos que sua energia não é finita. Em seguida, estudaremos modelos de vórtices locais com os termos de Maxwell e de Chern-Simons separadamente.

4.1 Vórtices globais

Usando apenas um campo escalar carregado, estudaremos um modelo de vórtice global. Vamos partir da densidade lagrangiana na forma

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \bar{\varphi} \partial^\mu \varphi - V(|\varphi|), \quad (4.1)$$

que é invariante por uma transformação global de fase: $\varphi \rightarrow \varphi e^{i\alpha}$, onde α é uma constante real. Nesse caso, V é o potencial e depende apenas do módulo do campo, sendo portanto real. Vale lembrar que $\mu = 0, 1, 2$, ou seja, estamos em (2,1) dimensões. O tensor métrico é $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -)$. A equação de Euler-Lagrange com respeito a $\bar{\varphi}$ para esse modelo

é

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi + \frac{\partial V}{\partial \bar{\varphi}} = 0. \quad (4.2)$$

A equação com respeito a φ pode ser facilmente obtida ao se tomar o complexo conjugado da equação acima. Para soluções estáticas, temos

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial V}{\partial \bar{\varphi}}. \quad (4.3)$$

Como φ é um campo complexo, podemos escrevê-lo na forma polar:

$$\varphi(\vec{r}) = |\varphi(\vec{r})| e^{i\beta(\vec{r})}, \quad (4.4)$$

onde $\vec{r} = (x, y)$, que pode ser substituída nas equação de movimento para se encontrar

$$\nabla^2 |\varphi| - |\varphi| \partial_i \beta \partial_i \beta + i (2 \partial_i |\varphi| \partial_i \beta + |\varphi| \nabla^2 \beta) = 0. \quad (4.5)$$

Ao subtrair a equação acima com sua complexo conjugada, ficamos com

$$2 \partial_i |\varphi| \partial_i \beta + |\varphi| \nabla^2 \beta = 0. \quad (4.6)$$

Em coordenadas polares (r, θ) , vemos que $\beta \propto \theta$ e $|\varphi| = h(r)$ satisfazem a condição acima. Assim, podemos escolher o seguinte ansatz para o campo φ :

$$\varphi = h(r) e^{in\theta}, \quad (4.7)$$

onde $h = h(r)$ é uma função real de variável real e n é um número que deve ser inteiro para que a função seja periódica, com período $2\pi/n$. Devido à essa escolha, é conveniente usar o operador laplaciano em coordenadas polares:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (4.8)$$

Substituindo Eq. (4.7) em Eq. (4.3), encontramos a seguinte equação para h

$$\frac{d^2 h}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dh}{dr} - \frac{n^2}{r^2} h = \frac{dV}{dh}. \quad (4.9)$$

A parcela $d^2 h/dr^2$ é semelhante a do kink. A segunda parcela, $(1/r)(dh/dr)$, por analogia com a mecânica clássica, pode ser entendida como um termo de atrito. Finalmente, a terceira parcela, $n^2 h/r^2$, pode ser entendida como um termo de massa que cai com r^2 , pois se fôssemos escrever nossa densidade lagrangiana em termos de h , veríamos que essa parcela da nossa equação seria originada por um termo de h^2 . O tensor energia-momento é dado por

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \bar{\varphi} \partial_\nu \varphi + \partial_\mu \varphi \partial_\nu \bar{\varphi} - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (4.10)$$

Usando

$$\partial_i = \frac{x^i}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \epsilon_{ij} \frac{x^j}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (4.11)$$

com $x^i = (x, y)$, podemos encontrar as componentes do tensor energia-momento:

$$T_{00} = h'^2 + \frac{n^2 h^2}{r^2} + V(h), \quad (4.12a)$$

$$T_{0i} = 0, \quad (4.12b)$$

$$T_{ij} = 2 \left(\frac{x_i x_j}{r^2} h'^2 + \frac{n^2 h^2 \epsilon_{il} \epsilon_{jk} x_l x_k}{r^4} \right) + \delta_{ij} \left(h'^2 + \frac{n^2 h^2}{r^2} \right) - \delta_{ij} V(h), \quad (4.12c)$$

onde T_{ij} nos fornece o estresse. Vejamos o que ocorre com a energia, dada por

$$E = \int_0^\infty d^2r T_{00}. \quad (4.13)$$

Substituindo a densidade de energia presente em Eq. (4.12a), chega-se a

$$E = 2\pi \int_0^\infty r dr \left(h'^2 + \frac{n^2 h^2}{r^2} + V \right). \quad (4.14)$$

Agora, a fim de testar a convergência da energia, vamos fazer a integração em regiões assintóticas, as quais definiremos por $r > r_0$. Isso pode ser feito considerando que, quando $r > r_0$, temos $V \approx 0$ e $h \approx c = \text{constante}$. Nesse limite assintótico, a energia fica

$$E = E_{0 \rightarrow r_0} + n^2 c^2 \int_{r_0}^\infty dr \frac{1}{r} \quad (4.15)$$

e

$$E = E_{0 \rightarrow r_0} + n^2 c^2 \ln r|_{r_0}^\infty \rightarrow \infty, \quad (4.16)$$

onde $E_{0 \rightarrow r_0} = n^2 c^2 \int_0^{r_0} dr (1/r)$. A energia claramente não é finita. Portanto, a solução para o nosso campo $\boldsymbol{\varphi}$ não é estável. Veremos mais adiante, para o caso local, que o campo de gauge quando acoplado ao campo $\boldsymbol{\varphi}$ faz com que a energia se torne finita, abrindo a possibilidade de termos uma solução estável.

Trabalhemos um pouco mais o tensor energia-momento, especificamente as componentes que fornecem o estresse. Definamos $\boldsymbol{\sigma}_{\{\hat{x}, \hat{y}\}}$ como a matriz, na base cartesiana, cujos elementos são os T_{ij} da Eq. (4.12c). Vamos levar nosso tensor para a base polar. Os vetores unitários se relacionam por $\hat{r} = \hat{x} \cos(\theta) + \hat{y} \sin(\theta)$, $\hat{\theta} = -\hat{x} \sin(\theta) + \hat{y} \cos(\theta)$, $x = r \cos(\theta)$ e $y = r \sin(\theta)$. Podemos definir, então, a matriz de transformação \boldsymbol{M} como

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

Para encontramos as componentes espaciais do tensor energia-momento na base polar, que é o estresse, o qual chamaremos de $\boldsymbol{\sigma}_{\{\hat{r}, \hat{\theta}\}}$, basta calcular

$$\boldsymbol{\sigma}_{\{\hat{r}, \hat{\theta}\}} = \boldsymbol{M} \boldsymbol{\sigma}_{\{\hat{x}, \hat{y}\}} \boldsymbol{M}^T, \quad (4.18)$$

onde \boldsymbol{M}^T é a matriz transposta de \boldsymbol{M} em (4.17). Por fim, encontramos

$$\boldsymbol{\sigma}_{\{\hat{r}, \hat{\theta}\}} = \begin{bmatrix} \frac{3h'^2 r^2 + n^2 h^2}{r^2} - V & 0 \\ 0 & \frac{3n^2 h^2 + h'^2 r^2}{r^2} - V \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

Dessa forma, vemos que, na base polar, os termos $\boldsymbol{\sigma}_{r\theta}$ e $\boldsymbol{\sigma}_{\theta r}$ são nulos. Logo, não há estresse na direção r para a θ e vice-versa. Isso faz com que o tensor energia-momento seja diagonal.

4.2 Vórtices locais

Na seção anterior, apresentamos um modelo de vórtice global. Contudo, vimos que sua energia diverge. Veremos a seguir modelos de vórtices locais, que possuem energia finita. Apresentaremos o modelo de Maxwell e em seguida o de Chern-Simons.

4.2.1 Vórtices de Maxwell-Higgs

Em [44], Nielsen e Olesen apresentaram um modelo no qual investigaram uma teoria de campos com soluções do tipo vórtices. Para tal, foi usado um campo escalar carregado φ acoplado a um campo de gauge abeliano A_μ via um grupo $U(1)$. Eles relacionaram as soluções aproximadas à corda de Nambu no limite do acoplamento forte. Esse modelo é conhecido como Maxwell-Higgs e é uma extensão relativística da teoria de supercondutividade de Ginzburg-Landau.

A densidade lagrangiana do nosso modelo em $(2,1)$ dimensões, com tensor métrico sendo $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -)$, é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \overline{D_\mu\varphi}D^\mu\varphi - V(|\varphi|). \quad (4.20)$$

Na expressão acima, o primeiro termo é o de Maxwell, responsável por descrever a dinâmica do campo de gauge A_μ , com $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ sendo o tensor campo eletromagnético. O segundo termo da lagrangiana fornece a dinâmica do campo escalar carregado φ , no qual $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ é a derivada covariante no espaço dos campos e acopla os campos. Por fim, o terceiro termo, $V(|\varphi|)$, é o potencial que só depende do módulo do campo escalar. É possível fazer generalizações dessa teoria. Em [45, 46], podemos encontrar mais detalhes sobre vórtices de Maxwell-Higgs generalizados. Essa densidade lagrangiana é invariante por uma transformação de calibre local:

$$\varphi \rightarrow \varphi e^{-ie\alpha(x^\mu)}, \quad (4.21a)$$

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu\alpha(x^\mu). \quad (4.21b)$$

Em termos da derivada usual, podemos escrever \mathcal{L} como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \partial_\mu\varphi\partial^\mu\bar{\varphi} - ieA_\mu(\bar{\varphi}\partial^\mu\varphi - \varphi\partial^\mu\bar{\varphi}) + e^2A_\mu A^\mu\varphi\bar{\varphi} - V(|\varphi|). \quad (4.22)$$

Podemos identificar uma corrente j_μ , associada puramente ao campo escalar, como

$$j_\mu = ie(\bar{\varphi}\partial_\mu\varphi - \varphi\partial_\mu\bar{\varphi}). \quad (4.23)$$

A equação de Euler-Lagrange para $\bar{\varphi}$ nos leva a

$$\partial_\mu\partial^\mu\varphi + ie\partial_\mu(A^\mu\varphi) + ieA^\mu\partial_\mu\varphi - e^2A_\mu A^\mu\varphi + \frac{\partial V}{\partial\bar{\varphi}} = 0. \quad (4.24)$$

Podemos expressá-la de maneira mais elegante em termos da derivada covariante D_μ :

$$D_\mu D^\mu\varphi + \frac{\partial V}{\partial\bar{\varphi}} = 0. \quad (4.25)$$

A equação de movimento para o campo A_ν é

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \quad (4.26)$$

onde

$$J^\mu = ie(\bar{\varphi}D^\mu\varphi - \varphi\overline{D^\mu\varphi}) \quad (4.27)$$

é a corrente invariante de Gauge e conservada, com $J^\mu = (\rho, \vec{J})$, onde ρ representa a densidade de cargas e \vec{J} a corrente vetorial. A relação entre as correntes é $J^\mu = j^\mu - 2e^2 A^\mu \varphi \bar{\varphi}$. O tensor energia-momento é dado por

$$T_{\mu\nu} = -F_{\mu\alpha}F_\nu^\alpha + \overline{D_\mu\varphi}D_\nu\varphi + D_\mu\varphi\overline{D_\nu\varphi} - \eta_{\mu\nu}\mathcal{L}. \quad (4.28)$$

Vamos definir o campo elétrico como $-F^{0i} = E_i = (E_x, E_y)$ e o magnético por $-F^{ij} = \varepsilon^{ijk}B_k$, com $B_i = (B_x, B_y, B_z)$. Em nosso caso, apenas a componente $-F^{12} = B_z \equiv B$ do campo magnético sobrevive, pois estamos em $(2, 1)$ dimensões. Podemos abrir o tensor energia-momento em componentes:

$$T_{00} = \frac{1}{2}(E^2 + B^2) + D_0\varphi\overline{D_0\varphi} + D_i\varphi\overline{D_i\varphi} + V(|\varphi|), \quad (4.29a)$$

$$T_{0i} = -\varepsilon_{ij}E_jB + D_0\varphi\overline{D_i\varphi} + \overline{D_0\varphi}D_i\varphi, \quad (4.29b)$$

$$T_{ij} = -E_iE_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}(B^2 + E^2) + D_i\varphi\overline{D_j\varphi} + \overline{D_i\varphi}D_j\varphi + \delta_{ij}D_\alpha\varphi\overline{D^\alpha\varphi} - \delta_{ij}V(|\varphi|). \quad (4.29c)$$

As componentes 0 e i da Eq. (4.26) são, respectivamente

$$\partial_i E_i = J_0 \quad (4.30a)$$

e

$$\partial_0 E_i + \varepsilon_{ji}\partial_j B = J_i \quad (4.30b)$$

Analisemos o caso estático e tomemos o calibre temporal $A_0 = 0$. Nesse caso, o campo elétrico é nulo, bem como a componente temporal das correntes: $J_0 = j_0 = 0$. Portanto, a Eq. (4.30a) é uma identidade e o vórtice de Maxwell não apresenta densidade de cargas. A Eq. (4.30b) para o campo magnético simplifica e assume a forma

$$\varepsilon_{ij}\partial_j B = -J_i. \quad (4.31)$$

A Eq. (4.25) se torna

$$D_i D_i \varphi = \frac{\partial V}{\partial \bar{\varphi}}. \quad (4.32)$$

Devemos resolver as duas equações anteriores. Para isso, vamos sugerir que nossos campos obedeçam ao seguinte ansatz:

$$\varphi = h(r)e^{in\theta} \quad (4.33a)$$

e

$$A_i = -\varepsilon_{ij}x^j \frac{n}{er^2} [a(r) - 1], \quad (4.33b)$$

com condições de contorno $h(0) = 0$, $h(\infty) \rightarrow v$, $a(0) = 1$ e $a(\infty) = 0$. v é tal que $V(v) = 0$, ou seja, v define o valor de $|\varphi|$ para o qual o potencial é mínimo. Aqui, definimos as componentes do potencial-vetor como $A^i = -A_i = (A_x, A_y)$. Em coordenadas polares, o vetor \vec{A} , nesse ansatz, só depende de r e está na direção $\hat{\theta}$, tal que

$$\vec{A}(r, \theta) = -\frac{n}{er} [a(r) - 1] \hat{\theta}, \quad (4.34)$$

Um detalhe importante é que podemos obter as mesmas equações do modelo de vórtice global estudado anteriormente tomando $a(r) = 1$ na Eq. (4.33b). Como $J_0 = 0$, estamos

interessados apenas nas componentes J_i . Para calcular a corrente J_i usando Eq. (4.27) é preciso antes calcular $D_i\varphi$:

$$D_i\varphi = \left\{ \partial_i + ie\epsilon_{ij}x^j \frac{n}{er^2} [a(r) - 1] \right\} h(r)e^{in\theta}. \quad (4.35)$$

Mas, pode-se escrever ∂_j como na Eq. (4.11). Daí:

$$D_i\varphi = e^{in\theta} \left[\frac{x^i}{r} h' - inh\epsilon_{ij} \frac{x^j}{r^2} a \right], \quad (4.36)$$

onde a linha indica a derivada de $h = h(r)$ com respeito ao seu argumento, isto é, $h' = dh(r)/dr$. A corrente J_i fica

$$J_i = \frac{2ne\epsilon_{ij}x^j}{r^2} ah^2, \quad (4.37)$$

que, quando escrita em coordenadas polares, fica

$$\vec{J} = \frac{2enah^2}{r} \hat{\theta}. \quad (4.38)$$

Assim, vemos que as componentes radiais do potencial vetor e da corrente invariante de gauge são nulas, evidenciando a simetria do nosso problema. Vamos agora calcular o campo magnético:

$$\begin{aligned} B &= -\epsilon_{ij}\partial_i A_j \\ &= \epsilon_{ij}\epsilon_{jk}\partial_i \left[\frac{x^k n}{er^2} (a - 1) \right] \\ &= -\frac{na'}{er}, \end{aligned} \quad (4.39)$$

onde $a' = da(r)/dr$.

Para o campo φ , podemos reescrever o primeiro membro da equação de movimento como

$$D_i D_i \varphi = (\partial_i + ieA_i) \left\{ \left[\frac{x^i}{r} h' - inh\epsilon_{ij} \frac{x^j}{r^2} a \right] e^{in\theta} \right\}. \quad (4.40)$$

Com o auxílio da Eq. (4.11) novamente, podemos desenvolver a expressão acima tal que, após alguns cálculos, chegaremos a

$$D_i D_i \varphi = \left[h'' + \frac{h'}{r} \right] e^{in\theta} - \frac{n^2 a^2 h}{r^2} e^{in\theta}, \quad (4.41)$$

e, para o segundo membro, podemos usar a regra da cadeia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(|\varphi|)}{\partial \bar{\varphi}} &= \frac{1}{2} \frac{\varphi}{|\varphi|} \frac{\partial V(|\varphi|)}{\partial |\varphi|} \\ &= \frac{1}{2} \frac{dV(h)}{dh} e^{in\theta}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

As equações de movimento (4.31) e (4.32), com auxílio das Eqs. (4.37), (4.39), (4.41) e (4.42) ficam

$$\begin{aligned} a'' - \frac{1}{r} a' - 2e^2 ah^2 &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dh(r)}{dr} \right) - \frac{n^2 a^2(r)}{r^2} h(r) &= \frac{1}{2} \frac{dV}{dh}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Podemos calcular explicitamente o fluxo magnético:

$$\begin{aligned}\Phi &= \int d^2r B \\ &= -\frac{2\pi n}{e} [a(\infty) - a(0)] \\ &= \frac{2\pi n}{e}.\end{aligned}\tag{4.44}$$

Note que, embora a terceira dimensão espacial não seja acessível ao nosso sistema, existe a intensidade do campo magnético e portanto um fluxo, que é quantizado. Podemos ainda escrever as componentes do tensor energia-momento como

$$T_{00} = \frac{1}{2} \left(\frac{na'}{er} \right)^2 + h'^2 + \frac{n^2 h^2 a^2}{r^2} + V(h),\tag{4.45a}$$

$$T_{0i} = 0,\tag{4.45b}$$

$$\begin{aligned}T_{ij} &= -\frac{\delta_{ij}}{2} \left(\frac{na'}{er} \right)^2 + 2 \left(\frac{x_i x_j}{r^2} h'^2 + \frac{n^2 h^2 \varepsilon_{il} \varepsilon_{jk} x_l x_k a^2}{r^4} \right) + \\ &\quad + \delta_{ij} \left(h'^2 + \frac{n^2 h^2 a^2}{r^2} \right) - \delta_{ij} V(h).\end{aligned}\tag{4.45c}$$

Assim, temos cada componente apenas em função de a e h . Seguindo a mesma análise de integração assintótica feita no modelo de vórtice global, vemos que a energia não diverge: a função $a = a(r)$, sob as condições de contorno estabelecidas, é responsável por “segurar” a parcela $n^2 h^2 a^2 / r^2$ da energia.

Novamente, como feito para o caso do vórtice global, definamos $\sigma_{\{\hat{x}, \hat{y}\}}$ como a matriz, na base cartesiana, cujos elementos são T_{ij} da Eq. (4.45c). Usando o mesmo procedimento das Eqs. (4.17) e (4.18), encontramos a parte espacial, que é o tensor de estresse, do tensor energia-momento na base polar, denotado por $\sigma_{\{\hat{r}, \hat{\theta}\}}$:

$$\sigma_{\{\hat{r}, \hat{\theta}\}} = \begin{bmatrix} \frac{(-n^2 a'^2 r + 6h'^2 r^2 + 2n^2 h^2 a^2)}{2r^2} - V & 0 \\ 0 & \frac{(-n^2 a'^2 r + 6n^2 h^2 a^2 + 2h'^2 r^2)}{2r^2} - V \end{bmatrix}.\tag{4.46}$$

Assim, o tensor energia-momento é diagonal.

4.2.1.1 Potencial ϕ^4

Vamos analisar as equações (4.43) e (4.43) para o caso de o nosso potencial ter a forma

$$V(|\phi|) = \frac{\lambda}{2} (v^2 - |\phi|^2)^2,\tag{4.47}$$

onde d e λ são constantes. Esse potencial tem seus mínimos na circunferência determinada pela equação $|\phi| = v$ no plano $\Re(\phi)\Im(\phi)$. Seu máximo se localiza em $\phi = 0$. Na Fig. 4.1 podemos ver seu gráfico. Podemos usar a Eq. (4.33a) para obter facilmente

$$V(h) = \frac{\lambda}{2} (v^2 - h^2)^2.\tag{4.48}$$

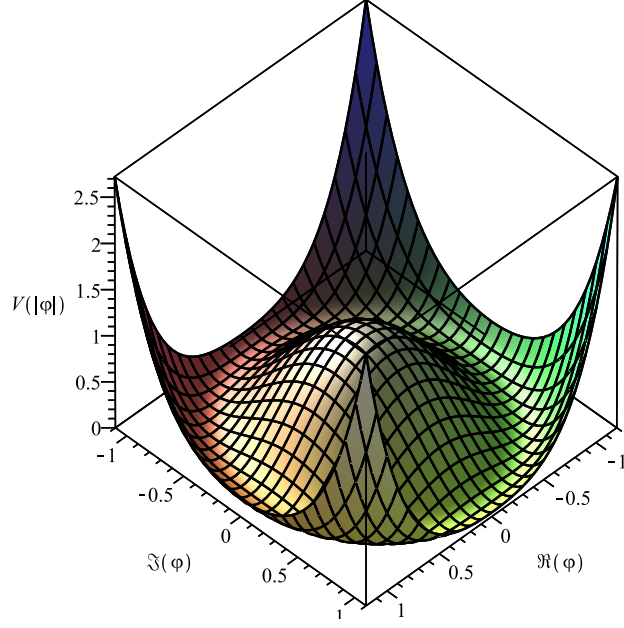


Figura 4.1 O potencial do modelo φ^4 cujo potencial é dado em Eq. (4.47) para $\lambda = v = 1$. Vale notar que os pontos de mínimo formam um círculo de raio $|\varphi| = v$.

Substituindo em Eq. (4.43):

$$\frac{d^2 h}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dh}{dr} - \frac{n^2 a^2 h}{r^2} + \lambda h(v^2 - h^2) = 0. \quad (4.49)$$

Infelizmente, não foi encontrada uma solução analítica para essa equação. Contudo, podemos obter informações sobre o comportamento dos nossos campos fazendo uma análise assintótica. A fim de linearizar as equações de movimento, vamos fazer a seguinte expansão:

$$a(r) \approx 0 + a_a(r) + \mathcal{O}[a_a^2(r)], \quad (4.50a)$$

$$h(r) \approx v + h_a(r) + \mathcal{O}[h_a^2(r)], \quad (4.50b)$$

onde as funções $a_a(r)$ e $h_a(r)$ são tais que termos de segunda ordem em diante são desprezados, isto é, $a_a^2 \approx h_a^2 \approx a_a h_a \approx 0$. Assim, a Eq. (4.49) assume a forma

$$\frac{d^2 h_a}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dh_a}{dr} - 2\lambda v^2 h_a = 0, \quad (4.51)$$

cuja solução é

$$h_a(r) = AI_0\left(\sqrt{2\lambda}vr\right) + BK_0\left(\sqrt{2\lambda}vr\right), \quad (4.52)$$

onde I_ν e K_ν são as funções de Bessel modificadas de primeiro e segundo tipo, respectivamente. Assintoticamente, temos

$$I_\nu(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \left(1 - \frac{4\nu^2 - 1}{8z} + \dots\right), \quad \text{se } |\arg\{z\}| \leq \frac{\pi}{2} \quad (4.53)$$

$$K_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left(1 + \frac{4\nu^2 - 1}{8z} + \dots\right), \quad \text{se } |\arg\{z\}| \leq \frac{3\pi}{2}. \quad (4.54)$$

Para o caso $0 < |z| \ll \sqrt{\nu+1}$, temos

$$I_\nu(z) \sim \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \quad (4.55)$$

$$K_\nu(z) \sim \begin{cases} -\ln\left(\frac{z}{2}\right) - \gamma, & \text{se } \nu = 0; \\ \frac{\Gamma(\nu)}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu, & \text{se } \nu > 0. \end{cases} \quad (4.56)$$

Vemos, usando as equações acima, que $I_\nu(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \infty$. Como o vórtice não apresenta soluções divergentes no infinito, nossa solução para h é:

$$h(r) \approx \nu + C_1 K_0\left(\sqrt{2\lambda} vr\right), \quad (4.57)$$

onde $K_0(z) = \int_0^\infty \cos(z \sinh t) dt$ e C_1 é uma constante. Agora, usemos a aproximação das Eqs. (4.50a) e (4.50b) em Eq. (4.43) para obter

$$\frac{d^2 a_a}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{da_a}{dr} - 2e^2 \nu^2 a_a = 0, \quad (4.58)$$

cuja solução é

$$a_a(r) = Ar I_1\left(\sqrt{2e} vr\right) + Br K_1\left(\sqrt{2e} vr\right). \quad (4.59)$$

Como $I_\nu(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \infty$, nossa solução para $a = a(r)$ fica bem definida e dada por

$$a(r) \approx Ar K_1\left(\sqrt{2e} vr\right), \quad (4.60)$$

onde A é uma constante e $K_1(z) = \int_0^\infty dt \exp(-z \cosh t) \cosh t$.

4.2.1.2 Equações BPS

Esse modelo nos permite encontrar equações de primeira ordem. Seguindo o procedimento indicado em [24] [25], podemos fazê-lo minimizando a energia, que para esse caso é dada por

$$E = 2\pi \int_0^\infty r dr \left[\frac{1}{2} \left(\frac{na'}{er}\right)^2 + h'^2 + \frac{n^2 h^2 a^2}{r^2} + \frac{\lambda}{2} (v^2 - h^2)^2 \right]. \quad (4.61)$$

Quando tomamos $\lambda = e^2$, é possível escrever a equação acima como

$$E = 2\pi \int_0^\infty r dr \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{na'}{er} \mp e(v^2 - h^2) \right]^2 + \left(h' \pm \frac{nha}{r} \right)^2 \pm \frac{n}{r} \frac{d}{dr} [a(v^2 - h^2)] \right\}. \quad (4.62)$$

Assim, ao minizarmos a energia, vemos que as soluções obedecem às equações

$$\frac{na'}{er} = \pm e(v^2 - h^2), \quad (4.63)$$

$$h' = \mp \frac{nha}{r}, \quad (4.64)$$

com a energia de Bogomol'nyi, $E = E_B = 2\pi |n| v^2$. Note que, apenas para o caso específico em que a altura do potencial é igual ao quadrado da carga elementar, podemos obter equações de primeira ordem.

4.2.2 Vórtices de Chern-Simons-Higgs

É possível estudar outras soluções do tipo vórtices, nas quais existem os termos de Maxwell e de Chern-Simons (CS) na densidade lagrangiana. Contudo, esse é um problema complexo, o que dificulta a análise de suas propriedades. Assim, podemos considerar o regime em que $\kappa \rightarrow \infty$ para desprezar o termo de Maxwell e analisar a influência do termo de Chern-Simons puro, que faz o sistema apresentar características bem distintas do de Maxwell:

- Os vórtices de CS são carregados, ao contrário dos de Maxwell;
- O modelo de vórtices de CS apresenta equações BPS para um potencial do tipo φ^6 , enquanto que o de Maxwell o faz para um potencial com a forma φ^4 .

Em [47], de Vega e Schaposnik mostraram que uma teoria de gauge não-Abeliana com o campo de Higgs e a adição do termo de Chern-Simons em (2,1) dimensões, exibe soluções do tipo vórtices carregados com energia finita.

Com o tensor métrico $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -)$, a densidade lagrangiana para esse modelo é:

$$\mathcal{L} = D_\mu \varphi \overline{D^\mu \varphi} + \frac{\kappa}{4} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} A_\alpha F_{\beta\gamma} - V(|\varphi|), \quad (4.65)$$

onde, como anteriormente, temos o primeiro termo representando a dinâmica do campo escalar carregado φ com a derivada covariante no espaço dos campos sendo $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$. O segundo termo é o de Chern-Simons e não depende da métrica. Ele fornece a dinâmica do campo de gauge Abelian, tal que, como anteriormente, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Observe que, nesse caso, a dinâmica não é quadrática com o tensor $F_{\mu\nu}$. A ação correspondente a \mathcal{L} é invariante por transformação de calibre local:

$$\varphi \rightarrow \varphi e^{-ie\alpha(x^\mu)}, \quad (4.66a)$$

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha(x^\mu). \quad (4.66b)$$

Observe que, embora a ação permaneça a mesma após essas transformações, a lagrangiana não é invariante: apenas apresenta um termo que pode ser escrito como um termo de superfície. A densidade lagrangiana em termos da derivada usual fica

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi \partial^\mu \bar{\varphi} - A_\mu j^\mu + e^2 A_\mu A^\mu \varphi \bar{\varphi} + \frac{\kappa}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} A_\alpha \partial_\beta A_\gamma - V(|\varphi|), \quad (4.67)$$

onde, novamente, $j_\mu = ie(\varphi \partial_\mu \bar{\varphi} - \bar{\varphi} \partial_\mu \varphi)$ é uma corrente associada puramente ao campo escalar. A equação de movimento para o campo $\bar{\varphi}$ é e A^ν , respectivamente, são

$$D_\mu D^\mu \varphi + \frac{\partial V}{\partial \bar{\varphi}} = 0 \quad (4.68)$$

e

$$\frac{\kappa}{2} \varepsilon^{\alpha\mu\nu} F_{\alpha\mu} = J^\nu, \quad (4.69)$$

onde

$$J_\mu = ie(\varphi \overline{D_\mu \varphi} - \bar{\varphi} D_\mu \varphi) = j_\mu - 2e^2 A_\mu |\varphi|^2 \quad (4.70)$$

é a corrente invariante de gauge, tal que, como anteriormente, $J^\mu = (\rho, \vec{J})$, ρ é a densidade de cargas e \vec{J} é a corrente vetorial. Definindo o campo elétrico como $-F^{0i} = E_i = (E_x, E_y)$

e o magnético por $-F^{12} = B$, podemos abrir a Eq. (4.69) em componentes para obter

$$B = -\frac{J_0}{\kappa}, \quad (4.71)$$

$$E_i = \frac{1}{\kappa} \varepsilon_{il} J^l. \quad (4.72)$$

O tensor energia momento da nossa teoria é dado por

$$T_{\mu\nu} = \overline{D_\mu \varphi} D_\nu \varphi + D_\mu \varphi \overline{D_\nu \varphi} - \eta_{\mu\nu} \overline{D_\alpha \varphi} D^\alpha \varphi + \eta_{\mu\nu} V(|\varphi|). \quad (4.73)$$

Podemos abrí-lo em componentes para obter

$$T_{00} = D_0 \varphi \overline{D_0 \varphi} + D_i \varphi \overline{D_i \varphi} + V(|\varphi|), \quad (4.74a)$$

$$T_{0i} = D_0 \varphi \overline{D_i \varphi} + \overline{D_0 \varphi} D_i \varphi, \quad (4.74b)$$

$$T_{ij} = D_i \varphi \overline{D_j \varphi} + \overline{D_i \varphi} D_j \varphi + \delta_{ij} D^\alpha \varphi \overline{D_\alpha \varphi} - \delta_{ij} V(|\varphi|). \quad (4.74c)$$

Vamos agora analisar o caso de vórtices estáticos. Nesse caso, temos claramente $J_0 = -2e^2 A_0 |\varphi|^2$. Assim, temos uma equação de vínculo:

$$A_0 = \frac{\kappa}{2e^2} \frac{B}{|\varphi|^2}. \quad (4.75)$$

A energia é dada por

$$E = \int d^2 r \left[D_i \varphi \overline{D_i \varphi} + \frac{\kappa^2 B^2}{4e^2 |\varphi|^2} + V(|\varphi|) \right]. \quad (4.76)$$

Da Eq. (4.68), nessas condições, temos que a equação para o campo escalar é

$$e^2 (A_0)^2 \varphi + D_i D_i \varphi = \frac{\partial V}{\partial \varphi}. \quad (4.77)$$

Vale notar que, ao contrário do modelo de vórtice local, não tomamos $A_0 = 0$, pois teríamos $J_\mu = 0$ e $E_i = B = 0$. Agora, vamos sugerir que os nossos campos tenham a mesma forma das Eqs. (4.33a) e (4.33b). Adicionalmente, iremos sugerir que

$$A_0 = f(r). \quad (4.78)$$

Nesse ansatz, usamos as mesmas condições de contorno que anteriormente: $h(0) = 0$, $h(\infty) \rightarrow v$, $a(0) = 1$ e $a(\infty) = 0$. v é tal que $V(v) = 0$, ou seja, v define o valor de $|\varphi|$ para o qual o potencial é mínimo.

Vamos escrever os termos das Eqs. (4.71), (4.72) e (4.77) nesse ansatz. Porém, antes, podemos usar o fato de que a carga elétrica Q pode ser calculada via

$$\begin{aligned} Q &= \int dr^2 J_0 \\ &= -\kappa \int dr^2 B \\ &= -\kappa \Phi \end{aligned} \quad (4.79)$$

$$(4.80)$$

O campo magnético é calculado da mesma maneira da seção anterior e pode ser visto na Eq. (4.39). O fluxo Φ , portanto, é o mesmo presente na Eq. (4.44). Assim, a carga é

$$Q = -\frac{2\pi\kappa n}{e} \quad (4.81)$$

Logo, vemos que o vórtice de Chern-Simons-Higgs apresenta carga elétrica. O campo elétrico, ao contrário do vórtice de Maxwell, não é nulo. Podemos calculá-lo:

$$\begin{aligned} E_i &= -\partial_i A_0 \\ &= -\frac{x^i}{r} f'. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Para a corrente, podemos ver que ele é exatamente a mesma do vórtice de Maxwell, visto que não modificamos a dinâmica do campo escalar nem o acoplamento com o campo de gauge. Portanto, podemos encontrar J_i na Eq. (4.37).

Usando o resultado para $D_i D_i \phi$ presente na Eq. (4.41), a Eq. (4.77) para o campo escalar assume a forma

$$e^2(A_0)^2 h e^{in\theta} + \left[h'' + \frac{h'}{r} \right] e^{in\theta} - \frac{n^2 a^2 x_i x_i h}{r^4} e^{in\theta} = \frac{1}{2} \frac{dV}{dh} e^{in\theta} \quad (4.83)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dh}{dr} \right) - \left[\frac{n^2 a^2}{r^2} - e^2 f^2 \right] h(r) = \frac{1}{2} \frac{dV}{dh}. \quad (4.84)$$

As Eqs. (4.39) e (4.75) resultam em

$$\frac{da}{dr} + \frac{2e^3 r h^2 f}{\kappa n} = 0. \quad (4.85)$$

Por fim, as Eqs. (4.37), (4.72) e (4.82) quando combinadas, fornecem

$$\frac{df}{dr} + \frac{2enah^2}{\kappa r} = 0. \quad (4.86)$$

Essas três equações diferenciais são acopladas, contudo nos permitem encontrar as funções h , a e f . Podemos eliminar a função f isolando-a na Eq. (4.85), calculando sua derivada com respeito a r e combinando com Eq. (4.86) para obter

$$r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{da}{dr} \right) - \frac{da}{dr} \frac{d \ln(h^2)}{dr} - \frac{4e^4 a h^4}{\kappa^2} = 0. \quad (4.87)$$

Podemos ainda escrever as componentes do tensor energia-momento como

$$T_{00} = h'^2 + \frac{n^2 h^2 a^2}{r^2} + \frac{\kappa^2}{4e^2} \left(\frac{na'}{erh} \right)^2 + V, \quad (4.88)$$

$$T_{0i} = -\frac{2enf h^2 a \varepsilon_{ij} x^j}{r^2}, \quad (4.89)$$

$$T_{ij} = 2 \left(\frac{x_i x_j}{r^2} h'^2 + \frac{n^2 h^2 \varepsilon_{il} \varepsilon_{jk} x_l x_k a^2}{r^4} \right) + \delta_{ij} \left(h'^2 + \frac{n^2 h^2 a^2}{r^2} + e^2 f^2 h^2 \right) - \delta_{ij} V. \quad (4.90)$$

Assim, temos cada componente apenas em função de a , f e h . De maneira semelhante ao Vórtice Local, como na seção anterior, as componentes radiais do potencial vetor e da corrente invariante de gauge têm componente radial nula. Novamente, definamos $T_{\{\hat{x}, \hat{y}\}}$ como a matriz, na base cartesiana, cujos elementos são T_{ij} da Eq. (4.90). Fazendo o mesmo procedimento das Eqs. (4.17) e (4.18), encontramos a parte espacial do tensor energia-momento na base polar, denotado por $T_{\{\hat{r}, \hat{\theta}\}}$:

$$T_{\{\hat{r}, \hat{\theta}\}} = \begin{bmatrix} \frac{3h'^2 r^2 + n^2 h^2 a^2}{r^2} + e^2 f^2 h^2 - V & 0 \\ 0 & \frac{3n^2 h^2 a^2 + h'^2 r^2}{2r^2} + e^2 f^2 h^2 - V \end{bmatrix}. \quad (4.91)$$

Vale notar o aparecimento da função $f = f(r)$ no nosso tensor energia-momento, que ainda é diagonal, devido ao fato de não termos o gauge temporal $A_0 = 0$.

4.2.2.1 Potencial φ^6

Vejamos agora as soluções das equações (4.84), (4.85) e (4.86) para o caso de o nosso potencial ter a forma [48]

$$V(|\varphi|) = \frac{\lambda^2}{4} [(|\varphi|^2 - v^2)^3 + \alpha^2 v^2 (|\varphi|^2 - v^2)^2]. \quad (4.92)$$

Esse potencial está plotado na Fig. 4.2.

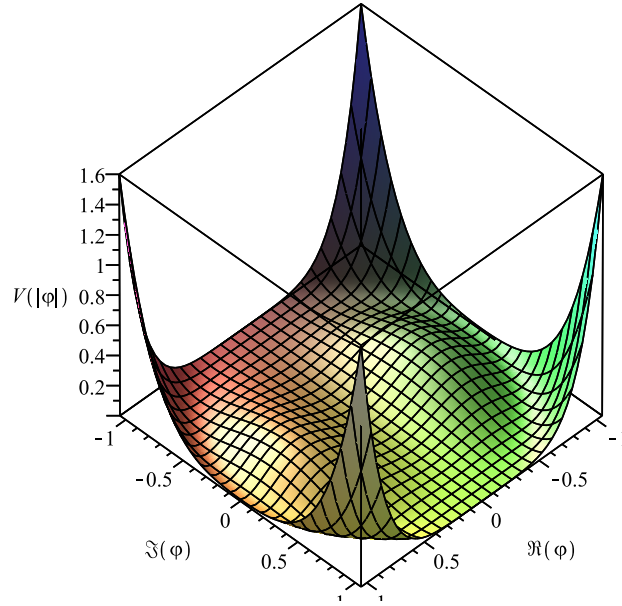


Figura 4.2 O potencial do modelo φ^6 , dado em Eq. (4.92) para $\lambda = v = \alpha = 1$. Vale notar que temos um mínimo em $\varphi = 0$ e um círculo de mínimos com raio $|\varphi| = v$. Note que o gráfico de $V(h)$ é exatamente o mesmo do caso unidimensional. Isso ocorre devido ao nosso ansatz.

Podemos usar o ansatz para facilmente obter

$$V(h) = \frac{\lambda^2}{4} [(h^2 - v^2)^3 + \alpha^2 v^2 (h^2 - v^2)^2]. \quad (4.93)$$

Substituindo em Eq. (4.84):

$$\frac{d^2 h}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dh}{dr} - \frac{n^2 a^2 h}{r^2} + e^2 f^2 h - \frac{\lambda^2}{4} [3h(h^2 - v^2)^2 + 2\alpha^2 v^2 h(h^2 - v^2)] = 0. \quad (4.94)$$

Para linearizar essa equação diferencial, façamos as seguintes aproximações:

$$a(r) \approx 0 + a_a(r) + \mathcal{O}[a_a^2(r)], \quad (4.95)$$

$$h(r) \approx v + h_a(r) + \mathcal{O}[h_a^2(r)], \quad (4.96)$$

$$f(r) \approx 0 + f_a(r) + \mathcal{O}[f_a^2(r)], \quad (4.97)$$

tal que $a_a^2 \approx h_a^2 \approx f_a^2 \approx a_a h_a \approx a_a f_a \approx h_a f_a \approx 0$, de maneira que estamos desprezando os termos a partir da segunda ordem. Assim, a Eq. (4.94) assume a forma

$$\frac{d^2 h_a}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dh_a}{dr} - \lambda^2 \alpha^2 v^4 h_a = 0, \quad (4.98)$$

cujas solução é

$$h_a(r) = AI_0(\lambda \alpha v^2 r) + BK_0(\lambda \alpha v^2 r), \quad (4.99)$$

tal que I_ν e K_ν são as funções de Bessel modificadas do primeiro e segundo tipo, respectivamente, cujas propriedades estão elencadas nas Eqs. (4.53) a (4.56). Portanto, como $I_\nu(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \infty$ e o vórtice não deve apresentar solução divergente no infinito, devemos descartar a parcela com I_0 :

$$h(r) \approx v + C_1 K_0(\lambda \alpha v^2 r). \quad (4.100)$$

Aqui, $K_0(z) = \int_0^\infty \cos(z \sinh t) dt$ e C_1 é uma constante. As Eqs. (4.85) e (4.86) ficam

$$\frac{da_a}{dr} + \frac{2e^3 v^2 r}{\kappa n} f_a = 0 \quad (4.101)$$

e

$$r \frac{df_a}{dr} + \frac{2en v^2}{\kappa} a_a = 0. \quad (4.102)$$

As duas equações acima são acopladas. Para desacoplá-las, basta derivar (4.102) e combinar com (4.101) para chegar a

$$r \frac{d^2 f_a}{dr^2} + \frac{df_a}{dr} - \frac{4e^4 v^4 r}{\kappa^2} f_a = 0, \quad (4.103)$$

cujas solução é

$$f_a(r) = AI_0\left(\frac{2e^2 v^2}{\kappa} r\right) + BK_0\left(\frac{2e^2 v^2}{\kappa} r\right), \quad (4.104)$$

onde I_ν e K_ν são as funções de Bessel modificadas do primeiro e segundo tipo, respectivamente, cujas propriedades podem ser vistas nas Eqs. (4.53) a (4.56). Como $I_\nu(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \infty$ e como o vórtice não apresenta soluções divergentes no infinito, vamos excluir a parcela que contém I_0 de maneira que nossa solução assintótica para f fique

$$f(r) \approx C_2 K_0\left(\frac{2e^2 v^2}{\kappa} r\right), \quad (4.105)$$

onde C_2 é uma constante. De Eq.(4.102), podemos encontrar a_a :

$$a_a = -\frac{\kappa r}{2en v^2} \frac{df_a}{dr}. \quad (4.106)$$

Mas,

$$\frac{df_a}{dr} = \frac{2e^2v^2}{\kappa} C_1 I_1 \left(\frac{2e^2v^2}{\kappa} r \right) - \frac{2e^2v^2}{\kappa} C_2 K_1 \left(\frac{2e^2v^2}{\kappa} r \right). \quad (4.107)$$

Assim, temos que

$$a_a \approx -\frac{\kappa r}{2env^2} \left[\frac{2e^2v^2}{\kappa} C_1 I_1 \left(\frac{2e^2v^2}{\kappa} r \right) - \frac{2e^2v^2}{\kappa} C_2 K_1 \left(\frac{2e^2v^2}{\kappa} r \right) \right]. \quad (4.108)$$

Novamente, para evitar divergências, eliminaremos o termo com I_1 . Por fim, ficamos com

$$a(r) \approx C_3 r K_1 \left(\frac{2e^2v^2}{\kappa} r \right), \quad (4.109)$$

onde $C_3 = \frac{C_2}{n}$ é uma constante e $K_1(z) = \int_0^\infty dt \exp(-z \cosh t) \cosh t$.

4.2.2.2 Equações BPS

Podemos encontrar equações de primeira ordem para esse modelo. Elas emergem no caso em que $\alpha = 1$ e $\lambda = 2e^2/\kappa$. A energia é dada por

$$E = 2\pi \int_0^\infty r dr \left[h'^2 + \frac{n^2 h^2 a^2}{r^2} + \frac{\kappa^2}{4e^2} \left(\frac{na'}{erh} \right)^2 + \frac{\lambda^2}{4} h^2 (1-h^2)^2 \right]. \quad (4.110)$$

Podemos escrever a equação acima como

$$E = 2\pi \int_0^\infty r dr \left\{ \left(h' \mp \frac{nha}{r} \right)^2 + \frac{1}{4} \left[\frac{\kappa na'}{e^2 rh} \pm \lambda h(1-h^2) \right]^2 \pm \left[-\frac{2h'nha}{r} + \frac{\kappa \lambda}{2e^2} \frac{na'}{r} (1-h^2) \right] \right\}. \quad (4.111)$$

No limite em que $\lambda = 2e^2/\kappa$, o último termo pode ser escrito como uma derivada total. Daí,

$$E = 2\pi \int_0^\infty r dr \left\{ \left(h' \mp \frac{nha}{r} \right)^2 + \frac{1}{4} \left[\frac{\kappa na'}{e^2 rh} \pm \lambda h(1-h^2) \right]^2 \pm \frac{n}{r} \frac{d}{dr} [a(1-h^2)] \right\}. \quad (4.112)$$

Portanto, ao minimizar a energia, obtemos as equações de primeira ordem

$$h' = \pm \frac{nha}{r}, \quad (4.113)$$

$$\frac{a'}{r} = \mp \frac{e^4}{2\kappa^2 n} h^2 (1-h^2), \quad (4.114)$$

com a energia de Bogomol'nyi $E = E_B = 2\pi|n|$. Apesar de serem de primeira ordem, as soluções analíticas dessas equações ainda não foram obtidas. Todavia, as soluções numéricas são mais facilmente obtidas por elas do que pelas equações de movimento, que são de segunda ordem.

Monopolos e Dyons

Na teoria eletromagnética de Maxwell, o campo magnético sempre aparece em dois pólos, comumente chamados de Norte e Sul. Monopolos magnéticos são partículas que podem ser descritas, de maneira geral, como um magneto de apenas um pólo. Historicamente, Dirac foi o primeiro a estudar monopolos em [10]. Ele construiu um monopolo pontual Abeliano que continha uma corda. O monopolo estaria situado em uma extremidade da corda, enquanto a outra se estenderia até o infinito. A quantização da carga elétrica é um problema que a versão quântica da teoria de Dirac consegue resolver: o produto entre a carga elétrica e magnética é proporcional a um número inteiro. Isso sugere que a presença de monopolo magnético no universo implicaria na quantização da carga elétrica.

Os físicos Gerard t'Hooft [49] e Alexander Polyakov [50] construíram, de forma independente, soluções clássicas que possuem propriedades de monopolos magnéticos. Diferentemente do monopolo de Dirac, essas soluções são estendidas, localizadas e possuem energia finita. Algumas teorias de unificação também predizem a existência de monopolos. Porém, eles ainda não foram encontrados experimentalmente. Na Ref. [51], podemos encontrar uma discussão sobre a produção de monopolos no universo.

Também se estudou a possibilidade da existência de partículas que apresentassem simultaneamente cargas elétrica e magnética. Julian Schwinger as denominou de dyons na Ref. [52]. Julia e Zee apresentaram um procedimento para introduzir carga elétrica no monopolo em [53].

O objetivo deste capítulo é apresentar o monopolo de 't Hooft-Polyakov e o dyon de Julia-Zee. Para isso, estudaremos a teoria de Yang-Mills-Higgs SU(2). Primeiramente, apresentamos as equações do dyon. Em seguida, tratamos o monopolo como um caso particular do dyon. Por fim, encontramos as equações BPS para o monopolo e, usando um pequeno truque, também o fazemos para o dyon. Mais detalhes matemáticos podem ser encontrados nas Refs. [20, 21].

5.1 Teoria de Yang-Mills-Higgs SU(2)

Partiremos da lagrangiana de um campo escalar (aqui chamado de Higgs) acoplado a um campo de gauge não-abeliano:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\mu\nu}^aF_{\alpha\beta}^a - \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}D_\mu\phi^aD_\alpha\phi^a - \frac{1}{4}\lambda\left(\phi^a\phi^a - \frac{\mu^2}{\lambda}\right)^2. \quad (5.1)$$

Na equação acima, μ é a massa do campo de Higgs, λ é a constante de acoplamento da auto-interação do campo de Higgs. Tanto μ como λ são constantes tais que o valor esperado no vácuo do campo de Higgs é $\mu/\sqrt{\lambda}$. A derivada covariante no espaço dos campos é $D_\mu\phi^a = \partial_\mu\phi^a + g\varepsilon^{abc}A_\mu^b\phi^c$, o tensor intensidade do campo eletromagnético não-abeliano é $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\varepsilon^{abc}A_\mu^bA_\nu^c$ e g é a constante de acoplamento do campo de

gauge com o campo de Higgs. Os índices latinos a, b e c denotam a estrutura interna do campo de Higgs e de gauge e podem assumir valores 1, 2 ou 3, dada a estrutura do grupo SU(2). Os índices gregos podem assumir valores 0, 1, 2 ou 3 e estão associados ao espaço de Minkowski, cujo tensor métrico é definido aqui como $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, +, +)$. Essa escolha é conveniente, pois os cálculos envolverão tanto os índices de Minkowski como os índices internos dos campos. Como a parte espacial de $g_{\mu\nu}$ é $g_{ij} = \delta_{ij} = \text{diag}(+, +, +)$, exatamente a mesma dos índices internos, ela se comportará de maneira Euclidiana, evitando quaisquer preocupações com levantamento e abaixamento de índices. As equações de movimento para a nossa teoria são

$$D_\mu F^{a\mu\nu} = g\varepsilon^{abc}\phi^b D^\nu \phi^c, \quad (5.2)$$

$$D_\mu D^\mu \phi^a = \lambda \phi^a \left(\phi^b \phi^b - \frac{\mu^2}{\lambda} \right), \quad (5.3)$$

onde $D_\mu F^{a\mu\nu} = \partial_\mu F^{a\mu\nu} + g\varepsilon^{abc}A_\mu^b F^{c\mu\nu}$.

Vamos analisar o caso estático. É possível escrever as equações de movimento em termos dos análogos dos campos elétrico e magnético. A componente temporal da Eq. (5.2) fica

$$\partial_i E^{ai} + g\varepsilon^{abc}A_i^b E^{ci} = g^2(A^{a0}\phi^b\phi^b - A^{b0}\phi^a\phi^b) \quad (5.4)$$

e as componentes espaciais

$$\varepsilon^{jik}\partial_j B_k^a - g\varepsilon^{abc}A_0^b E^{ci} + g\varepsilon^{abc}A_j^b \varepsilon^{jik}B_k^c = g\varepsilon^{abc}\phi^b \partial^i \phi^c + g^2\phi^b(A^{ai}\phi^b - A^{bi}\phi^a). \quad (5.5)$$

Nas duas equações anteriores, definimos E_i^a e B_i^a como $E_i^a = F_{0i}^a$ e $B_i^a = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F^{ajk}$. Como uma forma de melhor entender as soluções, 't Hooft sugeriu um tensor que pode ser identificado como o tensor eletromagnético abeliano:

$$F_{\mu\nu} = \hat{\phi}^a F_{\mu\nu}^a - \varepsilon^{abc}\hat{\phi}^a D_\mu \hat{\phi}^b D_\nu \hat{\phi}^c \quad (5.6)$$

$$= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \frac{1}{g}\varepsilon^{abc}\hat{\phi}^a \partial_\mu \hat{\phi}^b \partial_\nu \hat{\phi}^c, \quad (5.7)$$

onde $\hat{\phi}^a$ é o versor do campo de Higgs no espaço dos campos. Nessa definição, tem-se que $A_\mu = A_\mu^a \hat{\phi}^a$, $\hat{\phi}^a = \phi^a/|\phi|$ e $|\phi| = \sqrt{\phi^a \phi^a}$.

A Eq. (5.3) nos fornece

$$\begin{aligned} g^2 A_0^e (A^{a0}\phi^e - A^{e0}\phi^a) + \partial_i \partial^i \phi^a &+ g\varepsilon^{abc}\phi^c \partial_i A^{bi} + 2g\varepsilon^{abc}A^{bi} \partial_i \phi^c + \\ &+ g^2 A_i^e (A^{ai}\phi^e - A^{ei}\phi^a) = \lambda \phi^a \left(\phi^b \phi^b - \frac{\mu^2}{\lambda} \right). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Podemos calcular o tensor energia momento:

$$T_{\mu\nu} = D_\mu \phi^a D_\nu \phi^a - F_{\mu\alpha}^{a\alpha} F_{\alpha\nu}^a + g_{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (5.9)$$

Abrindo-o em componentes:

$$T_{00} = \frac{1}{2}(E_i^a E_i^a + B_i^a B_i^a) + \frac{1}{2}(D_0 \phi^a D_0 \phi^a + D_i \phi^a D_i \phi^a) + \frac{1}{4}\lambda \left(\phi^a \phi^a - \frac{\mu^2}{\lambda} \right)^2, \quad (5.10a)$$

$$T_{0i} = T_{i0} = D_0 \phi^a D_i \phi^a + \varepsilon_{ijk} E_j^a B_k^a, \quad (5.10b)$$

$$\begin{aligned} T_{ij} &= D_i \phi^a D_j \phi^a - B_i^a B_j^a - E_i^a E_j^a + \\ &+ \delta_{ij} \left[\frac{1}{2}(E_k^a E_k^a + B_k^a B_k^a) - \frac{1}{2}D_\alpha \phi^a D^\alpha \phi^a - \frac{1}{4}\lambda \left(\phi^a \phi^a - \frac{\mu^2}{\lambda} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.10c)$$

Essa teoria, descrita pela lagrangiana presente na Eq. (5.1), suporta uma diversidade de soluções, dentre elas as do tipo dyons e monopolos, que serão apresentadas nas seções seguintes.

5.2 Dyons

Ao contrário da ordem histórica, primeiramente iremos estudar o dyon e trataremos as equações do monopolo como um caso particular. De maneira a encontrar soluções estáticas esfericamente simétricas, adotaremos o ansatz em que nossa solução seja como um ouriço, como feito em Ref. [53]:

$$\phi^a = \frac{h(r)}{gr^2} x_a, \quad (5.11a)$$

$$A_i^a = \epsilon_{abi} x_b \frac{[k(r) - 1]}{gr^2}, \quad (5.11b)$$

$$A_0^a = \frac{j(r)}{gr^2} x_a. \quad (5.11c)$$

As condições de contorno são

$$\left. \frac{h(r)}{gr} \right|_{r \rightarrow \infty} = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \equiv \eta \quad (5.12a)$$

$$\left. \frac{h(r)}{gr} \right|_{r \rightarrow 0} = 0, \quad (5.12b)$$

$$k(r \rightarrow \infty) = 0, \quad (5.12c)$$

$$k(r \rightarrow 0) = 1, \quad (5.12d)$$

$$j(r \rightarrow \infty) = Mr + C, \quad (5.12e)$$

$$j(r \rightarrow 0) = 0, \quad (5.12f)$$

e são importantes para a convergência da energia. Esse ansatz fornece uma partícula com carga elétrica e magnética, conhecida como dyon. M é um parâmetro com dimensão de massa e C é uma constante que está ligada à carga do dyon. O campo elétrico E_i do dyon é

$$\begin{aligned} E_i &= F_{0i} \\ &= -\frac{x_i}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{j}{gr} \right). \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$(5.14)$$

Note que para grandes valores de r , $E_i \rightarrow Cx_i/(gr^3)$ e a lei de Gauss fornece a carga elétrica do dyon $Q = 4\pi C/g$. Para o campo magnético B_i :

$$B_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F^{jk} \quad (5.15)$$

$$= \frac{x_i}{gr^3}. \quad (5.16)$$

Devemos agora substituir o ansatz nas equações de movimento. Para desenvolver os cálculos, usamos a seguinte identidade:

$$\partial_i f(r) = \frac{x_i}{r} \frac{\partial f(r)}{\partial r} \quad (5.17)$$

$$= \frac{x_i}{r} f', \quad (5.18)$$

onde a linha indica a derivada da função com respeito ao seu argumento. Calculemos E_i^a :

$$\begin{aligned} E_i^a &= -\partial_i A_0 + g\epsilon^{abc} A_0^b A_i^c \\ &= -\delta_{ia} \left(\frac{j}{gr^2} \right) - \frac{x_i x_a}{r} \left(\frac{j}{gr^2} \right)' + \frac{j(k-1)}{gr^4} (x_a x_i - \delta_{ai} r^2). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Para B_i^a , temos:

$$\begin{aligned} B_i^a &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} (\partial_j A_k^a - \partial_k A_j^a + g\epsilon_{abc} A_j^b A_k^c) \\ &= 2\delta_{ia} \left(\frac{k-1}{gr^2} \right) + \left(\frac{k-1}{gr^2} \right)' \left(r\delta_{ia} - \frac{x_i x_a}{r} \right) + g \left(\frac{k-1}{gr^2} \right)^2 x_i x_a. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Os termos da Eq. (5.4) ficam:

$$\partial_i E_i^a = \frac{x_a}{g} \left(\frac{-r^2 j'' + 2jk}{r^4} \right), \quad (5.21)$$

$$g\epsilon^{abc} A_i^b E^{ci} = \frac{x_a}{g} \frac{(2jk^2 - 2jk)}{r^4}, \quad (5.22)$$

$$g^2 (A^{a0} \phi^b \phi^b - A^{b0} \phi^a \phi^b) = 0. \quad (5.23)$$

Vejamos agora os termos da Eq. (5.5):

$$\epsilon^{jik} \partial_j B_k^a = \epsilon_{jia} x_j \left[\left(\frac{k-1}{gr^2} \right)'' - g \left(\frac{k-1}{gr^2} \right)^2 + \frac{4}{r} \left(\frac{k-1}{gr^2} \right)' \right], \quad (5.24)$$

$$-g\epsilon^{abc} A_0^b E^{ci} = \epsilon_{jia} x_j \left(\frac{j^2 k}{gr^4} \right), \quad (5.25)$$

$$g\epsilon^{abc} A_j^b \epsilon^{jik} B_k^c = \epsilon_{jia} x_j \left[-2g \left(\frac{k-1}{gr^2} \right)^2 - g^2 r^2 \left(\frac{k-1}{gr^2} \right)^3 \right], \quad (5.26)$$

$$g\epsilon^{abc} \phi^b \partial^i \phi^c = \epsilon_{jia} x_j \left(\frac{h}{gr^2} \right)^2, \quad (5.27)$$

$$g^2 \phi^b (A^{ai} \phi^b - A^{bi} \phi^a) = \epsilon_{jia} x_j \left[(k-1) \left(\frac{h}{gr^2} \right)^2 \right]. \quad (5.28)$$

Para deduzir a última equação que vincula nossas funções, devemos calcular também os

termos presentes na Eq. (5.8)

$$g^2 A_0^e (A^{a0} \phi^e - A^{e0} \phi^a) = 0, \quad (5.29)$$

$$\partial_i \partial^i \phi^a = \frac{4x_a}{r} \left(\frac{h}{gr^2} \right)' + x_a \left(\frac{h}{gr^2} \right)'', \quad (5.30)$$

$$g \varepsilon^{abc} \phi^c \partial_i A^{bi} = 0, \quad (5.31)$$

$$2g \varepsilon^{abc} A^{bi} \partial_i \phi^c = -4x_a \frac{(k-1)h}{gr^4}, \quad (5.32)$$

$$g^2 A_i^e (A^{ai} \phi^e - A^{ei} \phi^a) = -2x_a \frac{h(k-1)^2}{gr^4}, \quad (5.33)$$

$$\lambda \phi^a \left(\phi^b \phi^b - \frac{\mu^2}{\lambda} \right) = \frac{\lambda h}{gr^2} \left(\frac{h^2}{g^2 r^2} - \frac{\mu^2}{\lambda} \right) x_a. \quad (5.34)$$

As Eqs. (5.4), (5.5) e (5.8) nos fornecem, respectivamente:

$$r^2 j'' = 2jk^2 \quad (5.35)$$

$$r^2 k'' = k(k^2 - j^2 + h^2 - 1) \quad (5.36)$$

$$r^2 h'' = 2hk^2 - \mu^2 r^2 h \left(1 - \frac{\lambda}{g^2 \mu^2 r^2} h^2 \right). \quad (5.37)$$

O tensor energia-momento da Eq. (5.9) nos fornece como densidade de energia:

$$\begin{aligned} T_{00} &= \frac{2k'^2 + j'^2 + h'^2}{2g^2 r^2} - \frac{hh' + jj'}{g^2 r^3} + \\ &+ \frac{k^4 - 2k^2 + 2j^2 k^2 + 2h^2 k^2 + h^2 + j^2 + 1}{2g^2 r^4} + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{h^2}{g^2 r^2} - \frac{\mu^2}{\lambda} \right)^2. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Lembrando que a energia total é dada por

$$E_T = \int_0^\infty dr r T_{00}, \quad (5.39)$$

ficamos com

$$E_T = E_B + E_E + E_G + E_P, \quad (5.40)$$

onde cada termo de energia é tal que

$$E_B = \frac{4\pi}{g^2} \int_0^\infty dr \left[k'^2 + \frac{(k^2 - 1)^2}{2r^2} \right] \quad (5.41)$$

é a contribuição do B_i^a ,

$$E_E = \frac{4\pi}{g^2} \int_0^\infty dr \left[\frac{j^2 k^2}{r^2} + \frac{(rj' - j)^2}{2r^2} \right] \quad (5.42)$$

é a parcela do E_i^a ,

$$E_G = \frac{4\pi}{g^2} \int_0^\infty dr \left[\frac{h^2 k^2}{r^2} + \frac{(rh' - h)^2}{2r^2} \right] \quad (5.43)$$

é uma energia gradiente e

$$E_P = \frac{4\pi}{g^2} \int_0^\infty dr \left[\frac{g^2 r^2 \lambda}{4} \left(\frac{h^2}{g^2 r^2} - \frac{\mu^2}{\lambda} \right)^2 \right] \quad (5.44)$$

é a energia potencial.

5.3 Monopulos

Vamos analisar o caso do o monopolo magnético de 't Hooft em que $A_0 = j(r) = 0$.

$$\phi^a = \frac{h(r)}{gr^2} x_a, \quad (5.45a)$$

$$A_i^a = \epsilon_{abi} x_b \frac{[k(r) - 1]}{gr^2}, \quad (5.45b)$$

$$A_0^a = 0. \quad (5.45c)$$

As condições de contorno são as mesmas do dyon para cada função respectiva:

$$\left. \frac{h(r)}{gr} \right|_{r \rightarrow \infty} = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \equiv \eta, \quad (5.46a)$$

$$\left. \frac{h(r)}{gr} \right|_{r \rightarrow 0} = 0, \quad (5.46b)$$

$$k(r \rightarrow \infty) = 0, \quad (5.46c)$$

$$k(r \rightarrow 0) = 1. \quad (5.46d)$$

$$(5.46e)$$

Nesse caso, E_i^a se anula e ficamos apenas com B_i^a :

$$E_i^a = 0, \quad (5.47)$$

$$B_i^a = 2\delta_{ia} \left(\frac{k-1}{gr^2} \right) + \left(\frac{k-1}{gr^2} \right)' \left(r\delta_{ia} - \frac{x_i x_a}{r} \right) + g \left(\frac{k-1}{gr^2} \right)^2 x_i x_a. \quad (5.48)$$

Vale notar ainda que, aqui, temos $A_\mu = 0$. Logo, $F_{0i} = 0$ e $F_{ij} = \epsilon_{ijk} x_k / (er^3)$. As equações dos campos se resumem a

$$r^2 k'' = k(k^2 + h^2 - 1), \quad (5.49)$$

$$r^2 h'' = 2hk^2 - \mu^2 r^2 h \left(1 - \frac{\lambda}{g^2 \mu^2 r^2} h^2 \right). \quad (5.50)$$

De fato, essas são as equações para o dyon com $j = 0$. Nesse caso, o tensor energia-momento fornece a seguinte densidade de energia

$$\begin{aligned} T_{00} &= \frac{1}{2} B_i^a B_i^a + \frac{1}{2} D_i \phi^a D_i \phi^a + \frac{1}{4} \lambda \left(\phi^a \phi^a - \frac{\mu^2}{\lambda} \right)^2 \\ &= \frac{2k'^2 + h'^2}{2g^2 r^2} - \frac{hh'}{g^2 r^3} + \frac{k^4 - 2k^2 + 2h^2 k^2 + h^2 + 1}{2g^2 r^4} + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{h^2}{g^2 r^2} - \frac{\mu^2}{\lambda} \right)^2 \end{aligned} \quad (5.51)$$

A energia, portanto, fica dada por

$$E_T = E_B + E_G + E_P \quad (5.52)$$

onde cada termo é tal que

$$E_B = \frac{4\pi}{g^2} \int_0^\infty dr \left[k'^2 + \frac{(k^2 - 1)^2}{2r^2} \right] \quad (5.53)$$

é a contribuição do B_i^a ,

$$E_G = \frac{4\pi}{g^2} \int_0^\infty dr \left[\frac{h^2 k^2}{r^2} + \frac{(rh' - h)^2}{2r^2} \right] \quad (5.54)$$

é uma energia gradiente e

$$E_P = \frac{4\pi}{g^2} \int_0^\infty dr \left[\frac{g^2 r^2 \lambda}{4} \left(\frac{h^2}{g^2 r^2} - \frac{\mu^2}{\lambda} \right)^2 \right] \quad (5.55)$$

é a energia potencial.

A seguir, apresentaremos o procedimento para encontrar equações de primeira ordem para o monopolo e o dyon. Primeiro, o faremos para o monopolo por ser mais simples. Em seguida, usando um vínculo entre as funções, chegaremos às equações BPS para o dyon.

5.4 Monopolo BPS

Após 't Hooft e Polyakov terem descoberto o monopolo magnético na teoria de Yang-Mills-Higgs, Prasad e Sommerfield encontraram uma solução analítica para o caso em que λ e μ tendem a zero, mas $\mu^2/\lambda = \eta$ é mantido constante. Bogomol'nyi deu um entendimento profundo nesse caso [24]. De maneira a encontrar as equações de primeira ordem para esse modelo, vamos reorganizar os termos da Eq. (5.51) para o caso em que $\lambda \rightarrow 0$ e $\mu \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} E_T &= \frac{4\pi}{g^2} \int_0^\infty dr \left[\left(\frac{k^2 - 1 \pm rh' \mp h}{\sqrt{2}r} \right)^2 + \left(\frac{rk' \pm hk}{r} \right)^2 \mp \frac{2hkk'}{r} \mp \frac{k^2 h'}{r} \pm \right. \\ &\quad \left. \pm \frac{hk^2}{r^2} \pm \frac{h'}{r} \mp \frac{h}{r^2} \right] \end{aligned} \quad (5.56)$$

$$= \frac{4\pi}{g^2} \int_0^\infty dr \left[\left(\frac{k^2 - 1 \pm rh' \mp h}{\sqrt{2}r} \right)^2 + \left(\frac{rk' \pm hk}{r} \right)^2 \mp \left(\frac{k^2 h - h}{r} \right)' \right] \quad (5.57)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{4\pi}{g^2} \int_0^\infty dr \left(\frac{k^2 - 1 \pm rh' \mp h}{\sqrt{2}r} \right)^2 + \frac{4\pi}{g^2} \int_0^\infty dr \left(\frac{rk' \pm hk}{r} \right)^2 \mp \\ &\quad \mp \frac{4\pi}{g^2} \int_0^\infty dr \left(\frac{k^2 h - h}{r} \right) \end{aligned} \quad (5.58)$$

$$= \frac{4\pi}{g^2} \int_0^\infty dr \left(\frac{k^2 - 1 \pm rh' \mp h}{\sqrt{2}r} \right)^2 + \frac{4\pi}{g^2} \int_0^\infty dr \left(\frac{rk' \pm hk}{r} \right)^2 + E_{BG}, \quad (5.59)$$

onde

$$\begin{aligned} E_{BG} &= \left| \frac{4\pi}{g^2} \left(\frac{k^2 h - h}{r} \right) \right|_0^\infty \\ &= \frac{4\pi\eta}{g} \end{aligned} \quad (5.60)$$

é a energia de Bogomol'nyi. E_{BG} depende apenas dos valores das funções k e h calculados em 0 e ∞ e é a menor energia que o sistema pode assumir. Esse mínimo na energia,

portanto, ocorre para o caso em que

$$k^2 - 1 \pm rh' \mp h = 0, \quad (5.61)$$

$$rk' \pm hk = 0. \quad (5.62)$$

As duas equações acima são conhecidas como equações BPS. É possível mostrar que essas duas equações de primeira ordem geram as seguintes equações de segunda ordem:

$$r^2 k'' = k(k^2 + h^2 - 1), \quad (5.63)$$

$$r^2 h'' = 2hk^2. \quad (5.64)$$

Essas equações correspondem às Eqs. (5.49) e (5.50) do monopolo de 't Hooft para o caso em que $\lambda = \mu = 0$. O grande trunfo desse formalismo é que ele fornece uma solução analítica para as equações:

$$h(r) = \eta gr \coth(\eta gr) - 1, \quad (5.65)$$

$$k(r) = \frac{\eta gr}{\sinh(\eta gr)}. \quad (5.66)$$

Note que essas soluções satisfazem as condições de contorno impostas. Na Fig. 5.1, podemos ver seus gráficos.

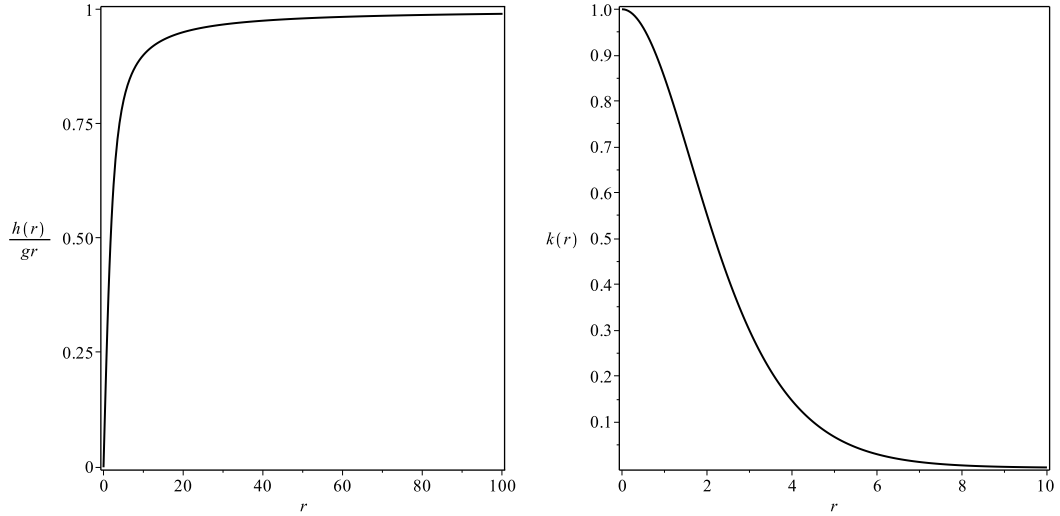


Figura 5.1 À esquerda, temos o gráfico da função $h(r)/(gr)$, com o $h = h(r)$ presente na Eq. (5.65). À direita, plotamos a função $k = k(r)$ na Eq. (5.66). Em ambos os gráficos, tomamos $\eta = g = 1$.

Vejamos agora as porções de energia dessas soluções. Tanto a energia potencial como a elétrica se anulam para o monopolo BPS. Para o campo magnético, temos

$$E_B = \frac{4\pi}{g^2} \int_0^\infty dr \left[k'^2 + \frac{(k^2 - 1)^2}{2r^2} \right] = \frac{2\pi\eta}{g}. \quad (5.67)$$

A energia gradiente é:

$$E_G = \frac{4\pi}{g^2} \int_0^\infty dr \left[\frac{h^2 k^2}{r^2} + \frac{(rh' - h)^2}{2r^2} \right] = \frac{2\pi\eta}{g}. \quad (5.68)$$

Logo, a energia total fica

$$E_T = E_B + E_G = \frac{4\pi\eta}{g}. \quad (5.69)$$

Vemos que há uma equipartição de energia e, como o esperado, a energia total é a de Bogomol'nyi.

5.5 Dyon BPS

Agora, encontraremos soluções analíticas para o dyon. A fim de evitar os longos cálculos de completamento de quadrado na energia, podemos usar um vínculo. Tomaremos $h(r) = f(r) \cosh \gamma$ e $j(r) = f(r) \sinh \gamma$, onde γ é um parâmetro adimensional. O limite BPS deve ser obedecido, isto é, $\mu \rightarrow 0$ e $\lambda \rightarrow 0$, mas $\mu/\lambda^2 \equiv \eta^2$ sendo finito. Nosso ansatz fica

$$\phi^a = \frac{f(r) \cosh \gamma}{gr^2} x_a, \quad (5.70a)$$

$$A_i^a = \epsilon_{abi} x_b \frac{[k(r) - 1]}{gr^2}, \quad (5.70b)$$

$$A_0^a = \frac{f(r) \sinh \gamma}{gr^2} x_a. \quad (5.70c)$$

O análogo do campo elétrico fica

$$E_i^a = \left[-\delta_{ia} \left(\frac{f}{gr^2} \right) - \frac{x_i x_a}{r} \left(\frac{f}{gr^2} \right)' + \frac{f(k-1)}{gr^4} (x_a x_i - \delta_{ai} r^2) \right] \sinh \gamma. \quad (5.71)$$

Para o análogo do campo magnético, temos

$$B_i^a = 2\delta_{ia} \left(\frac{k-1}{gr^2} \right) + \left(\frac{k-1}{gr^2} \right)' \left(r\delta_{ia} - \frac{x_i x_a}{r} \right) + g \left(\frac{k-1}{gr^2} \right)^2 x_i x_a. \quad (5.72)$$

As equações dos campos para esse caso são:

$$r^2 k'' = k(k^2 + f^2 - 1), \quad (5.73)$$

obtida da Eq. (5.36), e

$$r^2 f'' - 2fk^2 = 0, \quad (5.74)$$

resultante das Eqs. (5.35) e (5.37). Essas equações são as Eqs. (5.63) e (5.64) fazendo a substituição $h \rightarrow f$. Portanto, já possuímos a função f e as funções que regem as equações do dyon BPS tem uma expressão analítica:

$$f(r) = \eta gr \coth(\eta gr) - 1, \quad (5.75)$$

$$h(r) = [\eta gr \coth(\eta gr) - 1] \cosh \gamma, \quad (5.76)$$

$$j(r) = [\eta gr \coth(\eta gr) - 1] \sinh \gamma, \quad (5.77)$$

$$k(r) = \frac{\eta gr}{\sinh(\eta gr)}. \quad (5.78)$$

Nesse caso, o campo elétrico da Eq. (5.13) fica dado por

$$E_i = \frac{x_i}{r} \left(\frac{1 - k^2(r)}{gr^2} \right) \sinh \gamma. \quad (5.79)$$

Vejamos como fica a contribuição de cada campo na energia:

$$E_B = \frac{4\pi}{g^2} \int_0^\infty dr \left[k'^2 + \frac{(k^2 - 1)^2}{2r^2} \right] = \frac{2\pi\eta}{g} \quad (5.80)$$

é a contribuição do campo magnético,

$$E_E = \frac{4\pi}{g^2} \int_0^\infty dr \left[\frac{j^2 k^2}{r^2} + \frac{(rj' - j)^2}{2r^2} \right] = \frac{2\pi\eta \sinh^2 \gamma}{g} \quad (5.81)$$

é a parcela do campo elétrico,

$$E_G = \frac{4\pi}{g^2} \int_0^\infty dr \left[\frac{h^2 k^2}{r^2} + \frac{(rh' - h)^2}{2r^2} \right] = \frac{2\pi\eta \cosh^2 \gamma}{g} \quad (5.82)$$

é uma energia gradiente. A energia total, portanto, será

$$E_T = E_B + E_E + E_G = \frac{4\pi\eta}{g} \cosh^2 \gamma. \quad (5.83)$$

Vemos claramente que, quando tomamos $\gamma = 0$, caímos nas mesmas equações do monopolo de Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield.

Cosmologia com Campos Escalares

A Relatividade Geral de Einstein surgiu em 1916 e constitui a descrição moderna para a gravitação. No mesmo ano, Schwarzschild resolveu as equações de Einstein e descobriu a possibilidade da existência de uma singularidade no espaço-tempo. Assim, começou a surgir a idéia de buracos negros. Em 1917, Einstein adicionou um parâmetro em suas equações e deu origem ao estudo da cosmologia. Porém, só foi em 1922 que Friedmann encontrou uma solução para as equações de Einstein sem constante cosmológica que poderiam descrever a evolução do universo.

Neste capítulo, fazemos uma revisão sobre a ação de Einstein-Hilbert, a equação de Einstein e alguns conceitos básicos para se estudar física no espaço curvo. A seguir, apresentamos modelos de cosmologia com campos escalares.

6.1 Ação de Einstein-Hilbert

Einstein propôs que o espaço responderia à presença de matéria. Assim, o espaço poderia se curvar na presença da matéria. A ação de Einstein-Hilbert foi construída para mostrar essa resposta. Em 4 dimensões espaço-temporais, ela é dada por:

$$S = \int \left(-\frac{1}{16\pi G} R + \mathcal{L}_M \right) \sqrt{|g|} d^4x, \quad (6.1)$$

onde G é a constante da gravitação universal de Newton g é o determinante do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ definido segundo o intervalo $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. O termo \mathcal{L}_M representa a lagrangiana de matéria e R é o escalar de curvatura (ou de Ricci). Vamos agora variar a ação com respeito a $g^{\mu\nu}$:

$$\delta S = \int \left[-\frac{1}{16\pi G} \left(\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} \sqrt{|g|} + R \frac{\delta \sqrt{|g|}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) + \frac{\delta(\sqrt{|g|} \mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (6.2)$$

Pelo princípio da mínima ação, $\delta S = 0$. Daí,

$$\int \left(\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{R}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta \sqrt{|g|}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) \sqrt{|g|} \delta g^{\mu\nu} d^4x = 8\pi G \int \left(\frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} \mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}} \right) \sqrt{|g|} \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (6.3)$$

Nesse ponto, temos algo interessante. À esquerda da igualdade, vemos termos ligados à geometria do espaço que darão origem ao tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$. À direita, vemos termos ligados à matéria. Massa é a fonte de gravidade. Portanto, é natural que o tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ seja o objeto geométrico que faça o papel de “fonte de gravidade”. Logo, a igualdade acima deverá dar origem à seguinte equação:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (6.4)$$

que é conhecida como equação de Einstein. Vamos agora calcular $G_{\mu\nu}$ e $T_{\mu\nu}$. O tensor de Riemann é definido como

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - (\partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}), \quad (6.5)$$

onde $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ são os símbolos de Christoffel, tal que

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\alpha} \right). \quad (6.6)$$

A derivada covariante atuando na variação da conexão nos fornece:

$$\nabla_\lambda (\delta \Gamma^\rho_{\nu\mu}) = \partial_\lambda (\delta \Gamma^\rho_{\nu\mu}) + \Gamma^\rho_{\sigma\lambda} \delta \Gamma^\sigma_{\nu\mu} - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \delta \Gamma^\rho_{\sigma\mu} - \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} \delta \Gamma^\rho_{\nu\sigma}. \quad (6.7)$$

Podemos escrever a variação do tensor de Riemann como

$$\delta R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \nabla_\mu (\delta \Gamma^\rho_{\nu\sigma}) - \nabla_\nu (\delta \Gamma^\rho_{\mu\sigma}). \quad (6.8)$$

O tensor de Ricci é definido por

$$R_{\mu\nu} = R^\rho_{\sigma\rho\nu}. \quad (6.9)$$

Assim, ao usar Eq. (6.8) obtemos

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\rho (\delta \Gamma^\rho_{\nu\sigma}) - \nabla_\nu (\delta \Gamma^\rho_{\mu\sigma}). \quad (6.10)$$

O escalar de curvatura R é dado pela expressão

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^\mu_{\mu}. \quad (6.11)$$

Logo, a variação de R fica

$$\delta R = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}. \quad (6.12)$$

Combinando com Eq. (6.10), chegamos à

$$\delta R = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \nabla_\sigma \left(g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\sigma_{\nu\mu} - g^{\mu\sigma} \delta \Gamma^\rho_{\rho\mu} \right), \quad (6.13)$$

onde usamos a compatibilidade métrica da derivada covariante, isto é, $\nabla_\sigma g^{\mu\nu} = 0$. Vemos que o termo presente na Eq. (6.13) está integrado na Eq. (6.3). Como, para um dado vetor V^μ , vale a identidade $\sqrt{|g|} \nabla_\mu V^\mu = \partial_\mu (\sqrt{|g|} V^\mu)$, vemos que a Eq. (6.13) apresenta um termo de superfície. Logo,

$$\int \frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} \sqrt{|g|} d^4x = \int R_{\mu\nu} \sqrt{|g|} d^4x. \quad (6.14)$$

Agora, vamos calcular a variação do determinante do tensor métrico. Para isso, usaremos a fórmula de Jacobi mostrada em [54], parte 3, seção 8.3:

$$\delta(\det M) = \text{Tr}(\text{adj}(M) \delta M), \quad (6.15)$$

onde $\text{adj}(M)$ representa a matriz ajunta a M . Se M for inversível, então temos que sua inversa e sua ajunta estão relacionadas por $M^{-1} = (\det M)^{-1} \text{adj}(M)$. Assim, ficamos com

$$\frac{1}{\det M} \delta(\det M) = \text{Tr}(M^{-1} \delta M). \quad (6.16)$$

Tomando $M = g_{\mu\nu}$, encontramos a variação do determinante da métrica:

$$\delta g = g(g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}) = -g(g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}). \quad (6.17)$$

Então,

$$\delta \sqrt{|g|} = \frac{1}{2\sqrt{|g|}} \delta g = -\frac{1}{2} \sqrt{|g|} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (6.18)$$

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta \sqrt{|g|}}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu}. \quad (6.19)$$

A Eq. (6.3) fica

$$\int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \sqrt{|g|} \delta g^{\mu\nu} d^4x = 8\pi G \int \left(\frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} \mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}} \right) \sqrt{|g|} \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (6.20)$$

Se tomarmos

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (6.21)$$

e

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} \mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (6.22)$$

encontramos a equação de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (6.23)$$

O tensor de Einstein obedece a algumas propriedades como podemos ver na Ref. [57]:

- $G_{\mu\nu} = 0$ se o espaço-tempo for plano;
- $G_{\mu\nu}$ é construído apenas do tensor de Riemann e da métrica;
- $G_{\mu\nu}$ é linear em Riemann;
- $G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}$;
- $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$ para qualquer espaço Riemanniano suave.

O tensor energia momento é simétrico e tem divergência naturalmente nula, $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$. Assim, a Eq. (6.23) tem divergência nula. A equação de Einstein é um conjunto de dez equações diferenciais para o tensor métrico, visto que há simetria nos índices em ambos os lados da equação. Contudo, a identidade de Bianchi $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$ fornece quatro vínculos. Assim, a Eq. (6.23) apresenta apenas seis equações independentes.

6.2 Equação da Geodésica

Em um espaço plano, partículas não aceleradas se movem em uma linha reta. Se x^μ é parametrizado por λ , podemos expressar esse fato por:

$$\frac{d^2 x^\mu(\lambda)}{d\lambda^2} = 0. \quad (6.24)$$

Usando a regra da cadeia:

$$\frac{d^2 x^\mu(\lambda)}{d\lambda^2} = \frac{dx^\nu}{d\lambda} \partial_\nu \frac{dx^\mu}{d\lambda}. \quad (6.25)$$

O princípio da covariância nos diz que todas as equações tensoriais válidas na Relatividade Especial também serão válidas na Relatividade Geral se trocarmos a métrica de Minkowski por uma métrica geral do espaço curvo e se as derivadas parciais forem trocadas por derivadas covariantes. Assim, podemos generalizar a equação acima trocando a derivada parcial pela derivada covariante, isto é, $\partial_\nu \rightarrow \nabla_\nu$ para chegarmos a

$$\frac{dx^\nu}{d\lambda} \nabla_\nu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = 0. \quad (6.26)$$

A equação da geodésica portanto é

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0. \quad (6.27)$$

6.3 Limite Newtoniano

Vamos agora analisar como a gravidade Newtoniana se comporta nesse contexto. Faremos as seguintes exigências:

- As partículas tem velocidade muito menor do que a da luz;
- O campo gravitacional é fraco o suficiente para ser considerado apenas uma perturbação do espaço plano;
- O campo é estático, não muda com o tempo.

Da condição de baixas velocidades, temos:

$$\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dt}{d\tau}, \quad (6.28)$$

onde τ é o tempo próprio. A equação da geodésica (6.27) fica:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0. \quad (6.29)$$

No caso de campo estático, os símbolos de Christoffel relevantes ficam

$$\Gamma_{00}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_0 g_{\nu 0} + \partial_0 g_{0\nu} - \partial_\nu g_{00}) = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\nu g_{00}. \quad (6.30)$$

A fraqueza do campo gravitacional nos permite escrever a métrica como a de Minkowski, $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, +, +)$, mais uma pequena perturbação:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad \text{se } |h_{\mu\nu}| \ll 1, \quad (6.31)$$

cuja inversa é

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}, \quad (6.32)$$

tal que $g_{\mu\nu}g^{\nu\lambda} = \delta_\mu^\lambda$, onde $h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}h_{\rho\sigma}$. Desprezando os termos de segunda ordem em diante de $h_{\mu\nu}$:

$$\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\nu h_{00}. \quad (6.33)$$

A equação da geodésica assume a forma:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\partial_\nu h_{00})\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2. \quad (6.34)$$

A componente temporal $\mu = 0$ fornece $d^2t/d\tau^2 = 0$, que é $dt/d\tau$ constante. As componentes espaciais $\mu = i$ são

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\partial_i h_{00}. \quad (6.35)$$

Na gravitação Newtoniana, a aceleração de um corpo em um potencial gravitacional Φ é dada por

$$\vec{a} = -\nabla\Phi \quad (6.36)$$

e a equação de Poisson para a densidade de matéria é

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho. \quad (6.37)$$

Comparando com Eq. (6.36), vemos que $h_{00} = -2\Phi$ e

$$g_{00} = -(1 + 2\Phi). \quad (6.38)$$

Para um único corpo gravitando, a equação de Poisson (6.37) nos fornece o potencial Newtoniano conhecido:

$$\Phi = -\frac{GM}{r} \quad (6.39)$$

6.4 Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)

Vamos agora analisar a evolução temporal do nosso universo. O princípio cosmológico nos diz que o universo é homogêneo e isotrópico quando visto em largas escalas. Isso é plausível, pois esperamos que as forças ajam uniformemente no universo e não produzam irregularidades observáveis durante a evolução da matéria iniciada no Big Bang. Estudaremos o seguinte intervalo:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2d\Omega^2\right), \quad (6.40)$$

onde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ e k é uma constante tal que $k = -1, 0, 1$ representa geometria hiperbólica, plana ou esférica, respectivamente [55,56]. $a(t)$ é uma função conhecida como fator de escala e está associada à taxa de expansão do universo. O tensor métrico, então, para o nosso caso é

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2r^2\sin^2\theta \end{bmatrix}, \quad (6.41)$$

tal que a raiz de seu determinante é $\sqrt{-g} = (a^3 r^2 \sin \theta) / \sqrt{1 - kr^2}$. Usando Eq. (6.6), os símbolos de Christoffel sobreviventes são:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^0 &= a\dot{a}/(1 - kr^2) & \Gamma_{33}^2 &= -[\sin(2\theta)]/2 \\ \Gamma_{22}^0 &= a\dot{a}r^2 & \Gamma_{11}^1 &= kr/(1 - kr^2) \\ \Gamma_{01}^0 &= \Gamma_{02}^0 = \Gamma_{03}^0 = \dot{a}/a & \Gamma_{33}^0 &= a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta \\ \Gamma_{22}^1 &= -r(1 - kr^2) & \Gamma_{33}^1 &= -r(1 - kr^2) \sin^2 \theta \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = 1/r & \Gamma_{23}^3 &= \cot \theta \end{aligned} \quad (6.42)$$

Aqui, usamos a notação $\dot{a} = da/dt$. Sobrevivem também quatro tensores de Ricci:

$$R^0_0 = 3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad (6.43)$$

$$R^1_1 = R^2_2 = R^3_3 = \frac{\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{a^2}. \quad (6.44)$$

O escalar de curvatura fica

$$R = 6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right]. \quad (6.45)$$

Assim, as componentes do tensor de Einstein não-nulas são

$$G^0_0 = -3 \left[\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right], \quad (6.46)$$

$$G^1_1 = G^2_2 = G^3_3 = \frac{2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k}{a^2}. \quad (6.47)$$

O próximo passo é calcular o tensor energia-momento. Consideraremos a matéria e energia como um fluido perfeito a fim de termos a isotropia e homogeneidade do nosso espaço. O tensor energia momento de um fluido ideal com densidade ρ e pressão p é

$$T^\mu_\nu = \text{diag}(-\rho, p, p, p). \quad (6.48)$$

Usando a equação de Einstein como em Eq. (6.23), porém considerando o sistema de unidades em que $4\pi G = 1$, chegamos a

$$H^2 = \frac{2}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (6.49a)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\rho + 3p}{3}, \quad (6.49b)$$

onde introduzimos o parâmetro de Hubble $H = \dot{a}/a$. Pode-se definir um parâmetro de desaceleração q que mede a taxa da mudança na taxa de expansão do universo, dado por

$$q = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}. \quad (6.50)$$

Também é conveniente definir um parâmetro de densidade Ω , tal que

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_{\text{crit}}}, \quad (6.51)$$

onde $\rho_{\text{crit}} = 3H^2/2$ é a densidade crítica. A Eq. (6.49a) pode ser escrita em termos do parâmetro de densidade como

$$\Omega - 1 = \frac{k}{H^2 a^2}. \quad (6.52)$$

Essa equação é interessante por exibir qual é a geometria que descreve nosso universo, dada pelo valor de k , de acordo com o parâmetro de densidade medido. Por exemplo: se $\Omega = 1$, nosso universo é plano, pois $k = 1$. Vale comentar que é possível generalizar esse formalismo para valores de k não-normalizados [55]. Nesse caso, dizemos que $k < 0$ representa um espaço aberto, $k = 0$ um espaço plano e $k > 0$ um espaço fechado.

6.4.1 Formalismo de primeira ordem com campos escalares

Agora, introduziremos uma lagrangiana de matéria com um campo escalar como em Ref. [58]. Vamos partir de

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi - V(\phi). \quad (6.53)$$

A Eq. (6.22) fornece o seguinte tensor energia momento para essa teoria:

$$T^\mu{}_\nu = g^{\mu\lambda}\partial_\lambda\phi\partial_\nu\phi + \delta^\mu_\nu\mathcal{L}_M. \quad (6.54)$$

A equação de Euler-Lagrange é:

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right] - \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\partial\phi} = 0 \quad (6.55)$$

e nos leva a

$$-\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi) + \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0. \quad (6.56)$$

A função $a = a(t)$ do modelo FLRW só depende de t . Pelas eqs. (6.49a) e (6.49b) vemos que, como ρ e p estão relacionadas a $a(t)$, então é natural que nosso campo escalar ϕ dependa apenas do tempo, ou seja, $\phi = \phi(t)$. Nessa condição, as equações (6.54) e (6.56) fornecem:

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V, \quad (6.57)$$

$$p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V \quad (6.58)$$

e

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0. \quad (6.59)$$

Note que a equação de movimento para o campo ϕ é de segunda ordem. É possível construir um formalismo de primeira ordem para esse modelo. No caso em que $k = 0$, as equações (6.49a) e (6.49b) quando combinadas com eqs. (6.57) e (6.58) fornecem

$$H^2 = \frac{1}{3}\dot{\phi}^2 + \frac{2}{3}V, \quad (6.60a)$$

$$\dot{H} = -\dot{\phi}^2. \quad (6.60b)$$

Como $a = a(t)$ e $\phi = \phi(t)$, então $H = H(t)$ e o potencial é visto como uma função implícita do tempo. Contudo, da equação de movimento para o campo escalar, temos $V = V(\phi)$. Os dois pontos de vista devem ser equivalentes. Logo, escreveremos o parâmetro de Hubble H como

$$H = W(\phi), \quad (6.61)$$

com H dependendo do tempo implicitamente. Isso é essencialmente considerar que W seja uma função composta tal que $W = W[\phi(t)]$. A Eq. (6.60b) pode ser escrita como

$$\dot{\phi} = -W_\phi, \quad (6.62)$$

onde $W_\phi = \partial W / \partial \phi$. O potencial assume a forma

$$V = \frac{3}{2}W^2 - \frac{1}{2}W_\phi^2 \quad (6.63)$$

e o parâmetro de desaceleração fica $q = -1 + (W_\phi/W)^2$. O próximo passo é considerar um k genérico. Nesse caso, as equações ficam:

$$H^2 = \frac{1}{3}\dot{\phi}^2 + \frac{2}{3}V - \frac{k}{a^2}, \quad (6.64a)$$

$$\dot{H} = -\dot{\phi}^2 + \frac{k}{a^2}. \quad (6.64b)$$

Aqui, tomar apenas $H = W$ não é suficiente para resolver o problema, visto que há um termo em k . Assim, é preciso um novo vínculo através de uma nova função $Z = Z(\phi)$ que controle o termo em k . Agora, vamos supor

$$\dot{\phi} = k\alpha Z - W_\phi, \quad (6.65a)$$

$$H = W(\phi). \quad (6.65b)$$

O potencial assume uma nova forma, dada por

$$V = \frac{3}{2}W^2 + (k\alpha Z - W_\phi) \left(k\alpha Z + \frac{1}{2}W_\phi \right). \quad (6.66)$$

O vínculo emerge da equação de movimento do nosso campo ϕ :

$$W_{\phi\phi}Z + W_\phi Z_\phi - 2k\alpha ZZ_\phi - 2WZ = 0, \quad (6.67)$$

que, embora seja um vínculo aparentemente muito restrito, nos permite estudar algumas possibilidades.

Inicialmente, como exemplo, consideremos o caso mais simples, isto é, $k = 0$. Se escolhermos W como

$$W = A\phi^2, \quad (6.68)$$

onde A é uma constante real, o potencial fica

$$V = \frac{1}{2}A^2\phi^2(3\phi^2 - 4), \quad (6.69)$$

que apresenta quebra espontânea de simetria. Na Fig. 6.1 podemos ver o gráfico do potencial acima.

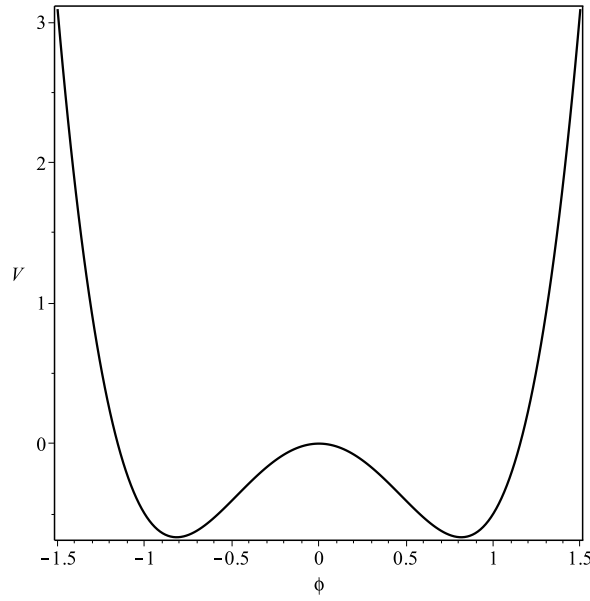


Figura 6.1 O potencial (6.69) para $A = 1$.

Obtemos, seguindo nosso método, a equação

$$\dot{\phi} = -2A\phi \quad (6.70)$$

o que nos leva à solução

$$\phi = e^{-2At} \quad (6.71)$$

com parâmetro de Hubble

$$H = Ae^{-4At} \quad (6.72)$$

Na Fig. 6.2 podemos ver o gráfico da solução e do parâmetro de Hubble. Na Ref. [58] podemos encontrar um estudo para o caso mais geral, no qual, $W = A\phi^n$.

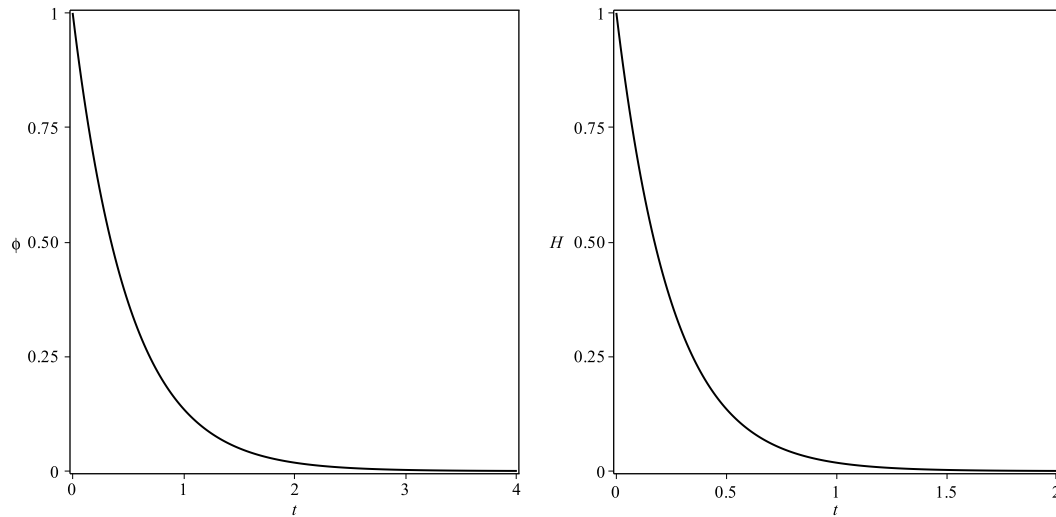


Figura 6.2 A solução (6.71) (esquerda) e o parâmetro de Hubble (6.72) (direita) para $A = 1$ e $k = 0$.

Vejamos agora um exemplo para o caso $k \neq 0$. Tomando $Z = W_\phi$, encontramos pelo vínculo em Eq. (6.67) que $(1 - k\alpha)W_{\phi\phi} = W$. Aqui, vemos que W pode ser limitada ou

não dependendo do sinal de $1 - k\alpha$. Nesse caso, o parâmetro de desaceleração fica dado por $q = 1 - (1 - k\alpha)(W_\phi/W)^2$.

Consideremos o modelo em que

$$W = A \sin(\phi/\sqrt{k\alpha - 1}), \quad (6.73)$$

que satisfaz o vínculo exigido, com A sendo uma constante e $k\alpha - 1$ sendo positivo. O potencial fica

$$V = \frac{3}{2}A^2 + (k\alpha - 1)A^2 \cos^2(\phi/\sqrt{k\alpha - 1}). \quad (6.74)$$

Na Fig. 6.3 plotamos o potencial acima.

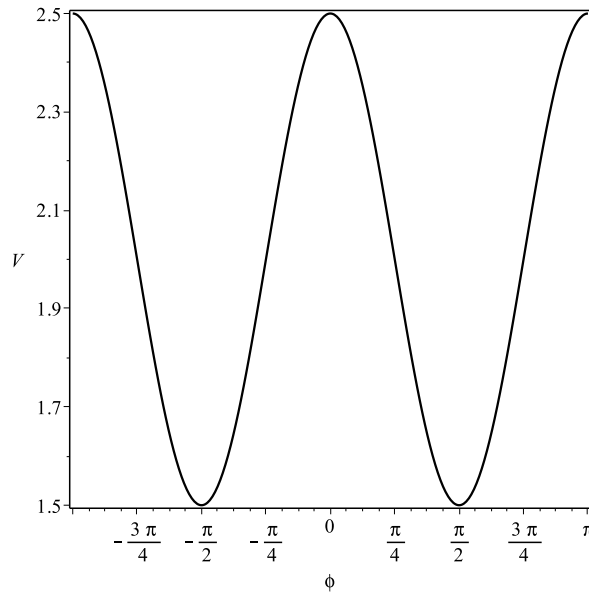


Figura 6.3 O potencial (6.74) para $A = 1$ e $k\alpha = 2$.

A Eq. (6.65a) que governa nosso campo ϕ fica dada por

$$\dot{\phi} = A\sqrt{k\alpha - 1} \cos(\phi/\sqrt{k\alpha - 1}) \quad (6.75)$$

e admite a seguinte solução:

$$\phi = \sqrt{k\alpha - 1} \arcsin[\tanh(At)]. \quad (6.76)$$

O parâmetro de Hubble para esse caso fica

$$H = A \tanh(At) \quad (6.77)$$

e vemos ainda que para esse caso, $q \leq -1$, ou seja, a evolução é acelerada. Na Fig. 6.4 podemos ver o gráfico da solução e do parâmetro de Hubble.

É possível fazer um estudo de primeira ordem para a presença de poeira. Para isso, devemos adicionar um termo da densidade de poeira nas equações. Esse estudo pode ser encontrado na Ref. [59].

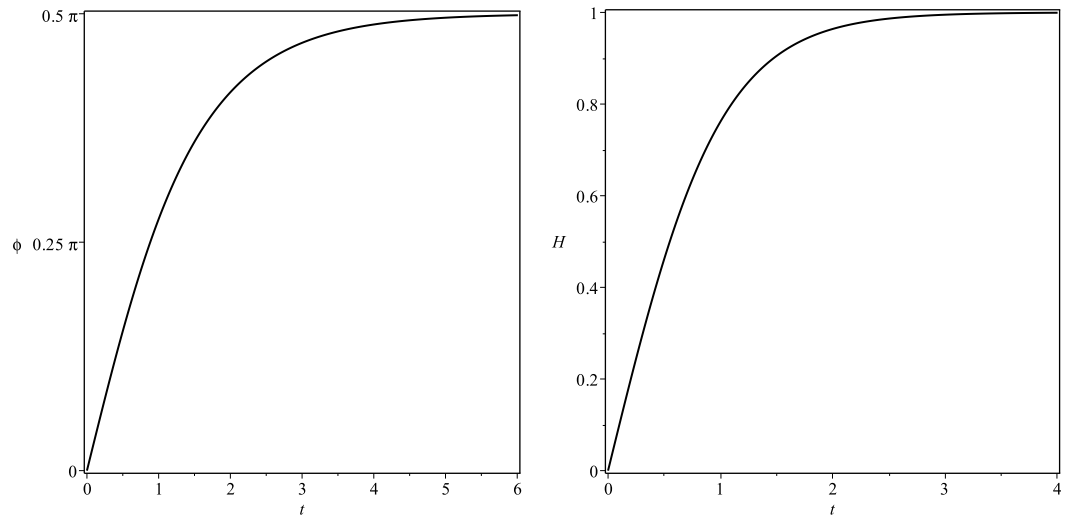


Figura 6.4 A solução (6.76) (esquerda) e o parâmetro de Hubble (6.77) (direita) para $A = 1$ e $k\alpha = 2$.

Mundo Brana

Nos anos 80, foi proposto que nosso universo observável fosse uma hipersuperfície quadridimensional $(3,1)$, denominada brana, imersa em um espaço-tempo de dimensão superior, chamado de bulk [60–64]. As partículas do modelo padrão estariam presas à brana, contudo a gravidade poderia viajar livremente pelo bulk. O modelo mais estudado de mundo brana foi introduzido por Randall e Sundrum em 1999, na Ref. [17] e analisado com campos escalares em [65]. Ele consiste em uma única brana imersa em um espaço-tempo de Anti-de-Sitter 5-dimensional $(4,1)$, com dimensão extra infinita. Em 2000, na Ref. [66], apresentou-se a idéia de modelar a dimensão extra com campos escalares. Iremos tomar essa direção nesse capítulo.

7.1 Modelo de Brana com um campo escalar

Consideremos uma ação em $(4,1)$ dimensões no espaço curvo, que descreve a gravidade acoplada a um campo escalar ϕ :

$$S = \int d^4x dy \sqrt{|g|} \left[-\frac{1}{4}R + \mathcal{L}(\phi, \partial_a \phi) \right]. \quad (7.1)$$

De maneira a destacar a dimensão extra, a chamamos de y na ação. Além disso, usamos índices latinos para denotar o espaço-tempo do bulk, isto é, $a = 0, 1, 2, 3, 4$, e os índices gregos para o espaço-tempo quadridimensional, ou seja, $\mu = 0, 1, 2, 3$. Aqui, g é o determinante da métrica 5-dimensional, isto é, $g = \det(g_a)$, R é o escalar de curvatura (ou de Ricci) e \mathcal{L} é a densidade lagrangiana associada ao campo escalar. Por simplicidade, estamos considerando $4\pi G = 1$.

Como feito no capítulo anterior, podemos variar a ação com respeito a métrica para obter as equações de Einstein:

$$G_{ab} = 2T_{ab}. \quad (7.2)$$

Para estudá-la, usamos o elemento de linha 5-dimensional presente em [66]:

$$ds_5^2 = e^{2A(y)} ds_4^2 - dy^2. \quad (7.3)$$

A função $A = A(y)$ é denominada função de deformação (warp function) e só depende da dimensão extra. O fator $e^{2A(y)}$ é dito fator de deformação e ds_4^2 é o elemento de linha do espaço de Minkowski quadridimensional:

$$ds_4^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (7.4)$$

Aqui, $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -)$ representa o tensor métrico de Minkowski quadridimensional. Para o bulk, portanto, temos o tensor métrico $g_{ab} = \text{diag}(e^{2A(y)}, -e^{2A(y)}, -e^{2A(y)}, -e^{2A(y)}, -1)$.

No modelo de Randall-Sundrum presente em Ref. [17], a warp function é tal que $A(y) \propto -|y|$. Logo, $e^{-|y|} \rightarrow 0$ se $y \rightarrow \pm\infty$, o que nos fornece um warp factor localizado e estendido. Esse modelo é conhecido como brana fina (thin brane), pois o warp factor apresenta um bico em $y=0$. Na Fig. 7.1 podemos ver esse comportamento. Como veremos mais adiante, é possível modelar a dimensão extra usando campos escalares. Isso faz com que surja um outro tipo de brana conhecida como brana espessa (thick brane).

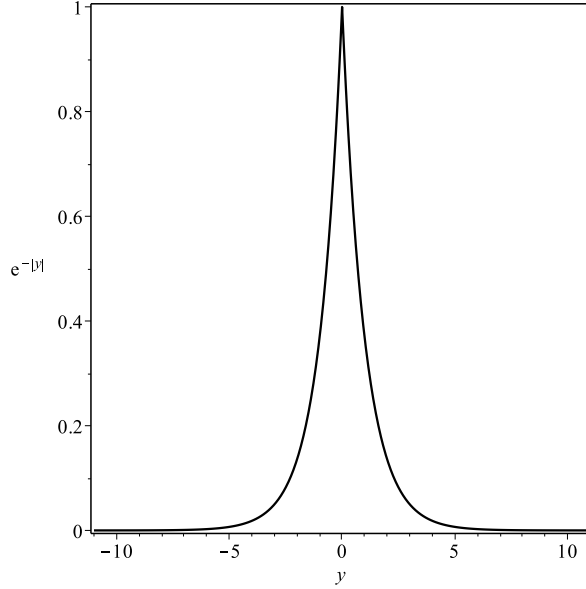


Figura 7.1 O warp factor para o modelo de brana fina de Randall-Sundrum.

Para estudar a equação de Einstein, devemos calcular o tensor de Einstein e o tensor energia-momento. Iniciemos pela parte geométrica calculando os símbolos de Christoffel sobreviventes:

$$\Gamma_{00}^4 = -\Gamma_{11}^4 = -\Gamma_{22}^4 = -\Gamma_{33}^4 = A'e^{2A}, \quad (7.5a)$$

$$\Gamma_{04}^0 = \Gamma_{14}^1 = \Gamma_{24}^2 = \Gamma_{34}^3 = A'. \quad (7.5b)$$

A linha indica a derivada da função com respeito a seu argumento, ou seja $A' = dA/dy$. Obtemos os seguintes tensores de curvatura não-nulos:

$$R_0^0 = R_1^1 = R_2^2 = R_3^3 = A'' + 4A'^2, \quad (7.6a)$$

$$R_4^4 = 4(A'' + A'^2). \quad (7.6b)$$

O escalar de curvatura fica

$$R = 8A'' + 20A'^2. \quad (7.7)$$

Assim, as componentes não-nulas do tensor de Einstein são

$$G_{00} = -G_{11} = -G_{22} = -G_{33} = -3e^{2A}(A'' + 2A'^2), \quad (7.8a)$$

$$G_{44} = 6A'^2. \quad (7.8b)$$

Agora, estudemos a parte associada à lagrangiana. Usaremos a lagrangiana padrão para campos escalares:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g_{ab}\partial^a\phi\partial^b\phi - V(\phi), \quad (7.9)$$

onde usamos o fato de que a derivada covariante atuando em um campo escalar é a própria derivada usual, isto é, $\nabla_\mu \phi = \partial_\mu \phi$. A equação de movimento é

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_a (\sqrt{g} g^{ab} \partial_b \phi) + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \quad (7.10)$$

Como a warp function só depende da dimensão extra, podemos estudar o caso estático e unidimensional em que o campo tenha essa mesma dependência, ou seja, $\phi = \phi(y)$. Nesse caso, a equação de movimento simplifica e assume a forma

$$\phi'' + 4A'\phi' - V_\phi = 0, \quad (7.11)$$

onde usamos a notação $V_\phi = \partial V / \partial \phi$. Note que essa equação diferencial é de segunda ordem e apresenta um termo de ϕ' que age como uma viscosidade.

O tensor energia-momento é

$$T_{ab} = \partial_a \phi \partial_b \phi - g_{ab} \mathcal{L}. \quad (7.12)$$

Para a lagrangiana presente na Eq. (7.9), sob a condição $\phi = \phi(y)$, temos

$$T_{00} = -T_{11} = -T_{22} = -T_{33} = e^{2A} \left(\frac{1}{2} \phi'^2 + V \right), \quad (7.13a)$$

$$T_{44} = \frac{1}{2} \phi'^2 - V. \quad (7.13b)$$

As equações de Einstein são

$$3A'' + 6A'^2 = -\phi'^2 - 2V, \quad (7.14a)$$

$$6A'^2 = \phi'^2 - 2V, \quad (7.14b)$$

que podem ser reescritas na forma

$$A'' = -\frac{2}{3} \phi'^2, \quad (7.15a)$$

$$A'^2 = \frac{1}{6} \phi'^2 - \frac{1}{3} V. \quad (7.15b)$$

Por um processo simples de derivação, é possível mostrar que as duas equações acima geram a equação de movimento (7.11). Essas equações mostram que o campo escalar e a warp function estão vinculados. Podemos escrever a densidade de energia na forma

$$\rho(y) = -\frac{3}{2} \frac{d}{dy} \left(e^{2A} A' \right). \quad (7.16)$$

Assim, podemos integrá-la para obtermos a energia:

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} dy \rho(y), \\ &= -\frac{3}{2} \left[e^{2A(y)} A'(y) \right] \Big|_{y=-\infty}^{y=\infty}. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Considerando que o warp factor seja uma função par em y , concluímos que a energia da brana é nula.

Em geral, por serem acopladas, de segunda ordem e altamente não-lineares, encontrar soluções analíticas para as equações do campo é uma tarefa difícil. Por isso, um formalismo de primeira ordem é bem-vindo. Isso pode ser feito considerando que o potencial tenha a seguinte forma especial [66]:

$$V = \frac{1}{8}W_\phi^2 - \frac{1}{3}W^2, \quad (7.18)$$

onde $W = W(\phi)$ é uma função arbitrária. Nesse caso, pode-se mostrar que o par

$$\phi' = \frac{1}{2}W_\phi, \quad (7.19)$$

$$A' = -\frac{1}{3}W \quad (7.20)$$

resolve as equações (7.15).

É preciso verificar se as modificações introduzidas pelo campo escalar não desestabilizam a brana. Para isso, podemos considerar que a métrica sofre pequenas perturbações tal que

$$ds^2 = e^{2A(y)} [\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(y, x)] dx^\mu dx^\nu - dy^2 \quad (7.21)$$

e o campo tenha a forma

$$\phi = \phi(y) + \xi(y, x). \quad (7.22)$$

As contribuições lineares na equação de Einstein são

$$\begin{aligned} h''_{\mu\nu} + 4A'h'_{\mu\nu} - e^{-2A}\square h_{\mu\nu} - e^{-2A}\eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta h_{\alpha\beta} + e^{-2A}(\partial_\mu\partial^\alpha h_{\alpha\nu} + \partial_\nu\partial^\alpha h_{\alpha\mu} - \partial_\mu\partial_\nu h) - \\ - \eta_{\mu\nu}(h'' + 4A'h' - e^{-2A}\square h + 2A''h + 8A'^2h) = 4\eta_{\mu\nu}(V_\phi\xi + \phi'\xi'), \end{aligned} \quad (7.23)$$

onde $h = h^\mu_\mu$ e a linha representa a derivada com respeito a y . Para simplificar a investigação, podemos considerar as componentes transversas de traço nulo nas flutuações da métrica, isto é,

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} = 0, \quad (7.24a)$$

$$h = 0. \quad (7.24b)$$

Nesse caso, a Eq. (7.23) simplifica e toma a forma

$$(\partial_y^2 + 4A'\partial_y - e^{-2A}\square)h_{\mu\nu} = 0. \quad (7.25)$$

A equação acima deve representar a gravitação em quatro dimensões. Portanto, deve haver modo zero para a equação de Klein-Gordon, de maneira que sua solução deve incluir ondas planas, ou seja, $h_{\mu\nu} \propto e^{\pm ip \cdot x}$. Fazemos agora a mudança de variável $y \rightarrow z$ com $dz = e^{-A(y)}dy$ tal que a métrica fique conformemente plana:

$$ds_5^2 = e^{2A} \{ [\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(y, x)] dx^\mu dx^\nu - dz^2 \} \quad (7.26)$$

e a Eq. (7.25) assuma a forma

$$(-\partial_z^2 - 3A_z\partial_z + \square)h_{\mu\nu} = 0. \quad (7.27)$$

Definindo

$$h_{\mu\nu} = e^{-ip \cdot x} e^{3A(z)/2} H_{\mu\nu}(z), \quad (7.28)$$

chegamos a uma equação do tipo Schrödinger, que governa a estabilidade do sistema:

$$[-\partial_z^2 + U(z)] H_{\mu\nu} = p^2 H_{\mu\nu}, \quad (7.29)$$

onde

$$U(z) = \frac{9}{4} A_z^2 + \frac{3}{2} A_{zz}. \quad (7.30)$$

Note que o potencial de estabilidade depende apenas da warp function. A equação de estabilidade é fatorizável. Podemos definir o operador

$$S = \frac{d}{dz} - \frac{3}{2} A_z \quad (7.31)$$

e escrever a Eq. (7.29) como

$$S^\dagger S H_{\mu\nu} = p^2 H_{\mu\nu}. \quad (7.32)$$

Essa fatorização mostra que o autovalor da equação de estabilidade é não-negativo. Portanto, a brana modelada por um campo escalar é estável.

7.1.1 Brane Splitting

Um fenômeno particularmente interessante é o de separação da brana, ou brane splitting. Consideremos a função

$$W_p(\phi) = \frac{2p}{2p-1} \phi^{\frac{2p-1}{p}} - \frac{2p}{2p+1} \phi^{\frac{2p+1}{p}}, \quad (7.33)$$

onde p é um parâmetro natural ímpar. Esse modelo é conhecido como modelo p e foi estudado no cenário de mundo brana na Ref. [67]. O potencial pode ser encontrado via Eq. (7.18) e está plotado na Fig. 7.2.

$$V_p(\phi) = \frac{1}{2} \left(\phi^{\frac{p-1}{p}} - \phi^{\frac{p+1}{p}} \right)^2 - \frac{4}{3} \left(\frac{p}{2p-1} \phi^{\frac{2p-1}{p}} - \frac{p}{2p+1} \phi^{\frac{2p+1}{p}} \right)^2. \quad (7.34)$$

Vamos investigar as soluções desse modelo. Primeiramente, analisemos a Eq. (7.19), que fica

$$\phi' = \phi^{\frac{p-1}{p}} - \phi^{\frac{p+1}{p}}. \quad (7.35)$$

Ela possui a seguinte solução analítica

$$\phi_p(y) = \tanh^p \left(\frac{y}{p} \right), \quad (7.36)$$

que está plotada na Fig. 7.2. Note que a espessura da solução diminui à medida que p aumenta. Usando a Eq. (7.20), é possível encontrar a warp function:

$$A_p(y) = -\frac{1}{3} \frac{p}{2p+1} \tanh^{2p} \left(\frac{y}{p} \right) - \frac{4}{3} \frac{p^2}{4p^2-1} \left\{ \ln \left[\cosh \left(\frac{y}{p} \right) \right] - \sum_{n=1}^{p-1} \frac{1}{2n} \tanh^{2n} \left(\frac{y}{p} \right) \right\}. \quad (7.37)$$

Na Fig. 7.2 podemos ver o gráfico do warp factor para alguns valores de p . Vemos que o fator de deformação (warp factor) é suavizado, sem bicos. Nesse caso, dizemos que essa brana é espessa (thick brane).

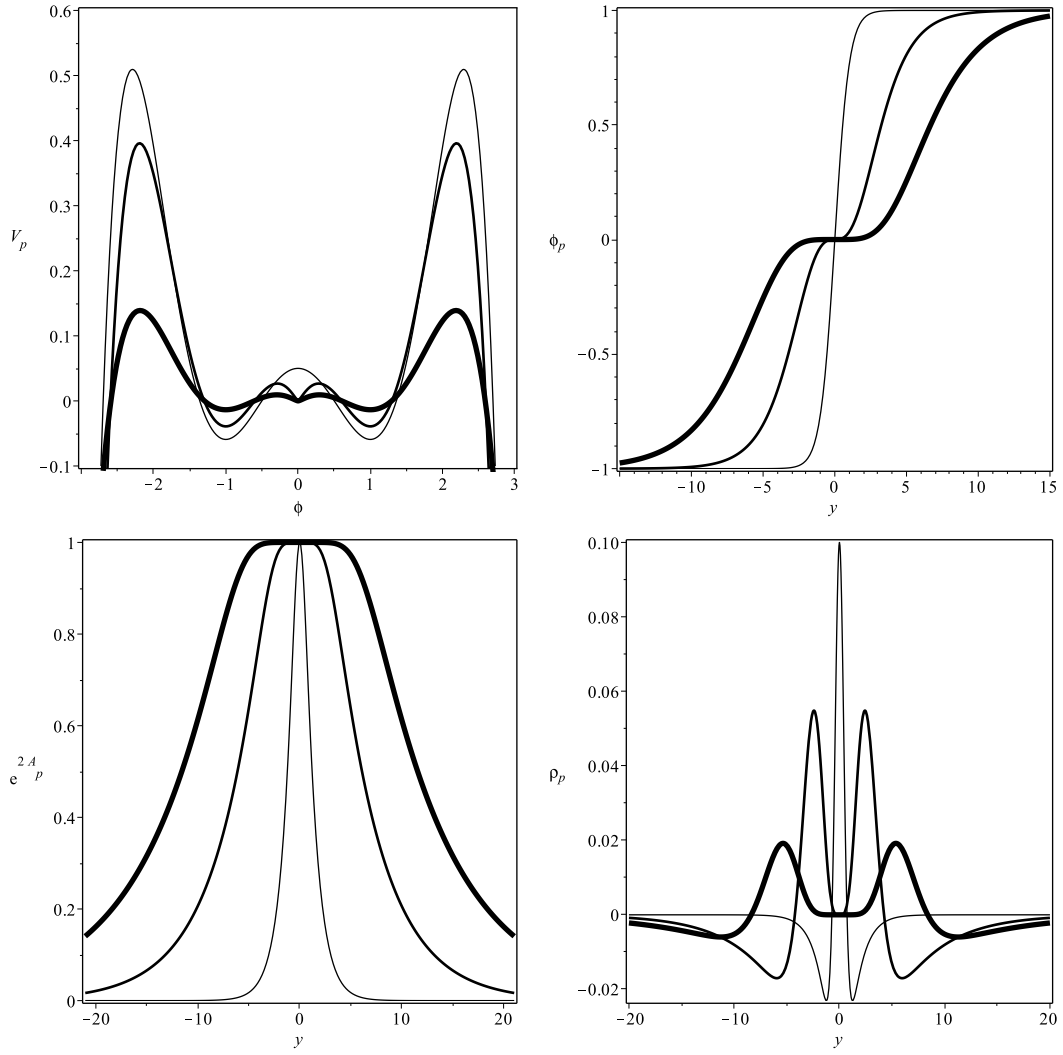


Figura 7.2 À esquerda superior, vemos o potencial presente na Eq. (7.34). Plotamos $V_1/10$ para melhor comparação nos gráficos. O gráfico à direita superior contém a solução presente na Eq. (7.36). O plot à esquerda inferior exibe o warp factor com a warp function presente na Eq. (7.37). A figura restante nos mostra o comportamento da densidade de energia. Plotamos $\rho_1/10$ para melhor comparação com os demais casos. Em todos os gráficos, temos $p = 1, 3$ e 5 com espessura da linha aumentando com p .

A expressão para a densidade de energia é um tanto complicada e por isso ela será omitida. Contudo, plotamos seu gráfico na Fig. 7.2. O comportamento da densidade de energia faz surgir branas espessas compostas por uma ($p = 1$) ou duas ($p = 3, 5, \dots$) interfaces. No último caso, pode-se ver aparecer uma nova fase entre as duas interfaces em que a densidade do campo de matéria fica mais concentrada. Fazendo um comparativo entre os gráficos do warp factor e da densidade de energia, podemos ver que o warp factor é aproximadamente constante para $p = 3, 5, \dots$ quando estamos dentro da brana na região onde a densidade de energia se anula. Isso revela a presença de uma nova fase dentro da brana, protegida por duas interfaces que aparecem centradas em pontos que maximizam a densidade de energia. O caso $p = 1$ apresenta um comportamento diferente e não suporta essa estrutura interna.

7.2 Modelo de Brana com dois campos escalares

Na seção anterior, estudamos um modelo de brana modelada por apenas um campo escalar. Agora, introduziremos um campo escalar adicional. Nesse caso, a ação será

$$S = \int d^4x dy \sqrt{|g|} \left[-\frac{1}{4}R + \mathcal{L}(\phi, \partial_a \phi, \chi, \partial_a \chi) \right]. \quad (7.38)$$

A parte geométrica da teoria permanece a mesma e o tensor de Einstein deve ser encontrado para a métrica presente na Eq. (7.3). Como calculado anteriormente, as componentes do tensor de Einstein podem ser vistas nas Eqs. (7.8). Para estudarmos as soluções da equação de Einstein, devemos encontrar o tensor energia momento. Para isso, consideraremos a seguinte densidade lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_a \phi \partial^a \phi + \frac{1}{2} \partial_a \chi \partial^a \chi - V(\phi, \chi). \quad (7.39)$$

As equações de Euler-Lagrange para as soluções estáticas e dependentes apenas da dimensão extra desse sistema são

$$\phi'' + 4A'\phi' - V_\phi = 0, \quad (7.40)$$

$$\chi'' + 4A'\chi' - V_\chi = 0. \quad (7.41)$$

O tensor energia-momento pode ser calculado:

$$T_{ab} = \partial_a \phi \partial_b \phi + \partial_a \chi \partial_b \chi - g_{ab} \mathcal{L}. \quad (7.42)$$

Para a lagrangiana presente na Eq. (7.9), sob a condição $\phi = \phi(y)$, temos

$$T_{00} = -T_{11} = -T_{22} = -T_{33} = e^{2A} \left(\frac{1}{2} \phi'^2 + \frac{1}{2} \chi'^2 + V \right), \quad (7.43a)$$

$$T_{44} = \frac{1}{2} \phi'^2 + \frac{1}{2} \chi'^2 - V. \quad (7.43b)$$

As equações de Einstein nos fornece

$$A'' = -\frac{2}{3} (\phi'^2 + \chi'^2), \quad (7.44a)$$

$$A'^2 = \frac{1}{6} (\phi'^2 + \chi'^2) - \frac{1}{3} V. \quad (7.44b)$$

Podemos encontrar um formalismo de primeira ordem seguindo um procedimento semelhante ao feito para o modelo de um campo. Considerando que o potencial tenha a forma

$$V = \frac{1}{8} (W_\phi^2 + W_\chi^2) - \frac{1}{3} W^2, \quad (7.45)$$

onde $W = W(\phi, \chi)$ é uma função auxiliar. Nesse caso, pode-se mostrar que

$$\phi' = \frac{1}{2} W_\phi, \quad (7.46)$$

$$\chi' = \frac{1}{2} W_\chi, \quad (7.47)$$

$$A' = -\frac{1}{3} W \quad (7.48)$$

resolvem as equações (7.44). Usando as equações acima, é possível escrever a densidade de energia como uma derivada total e a Eq. (7.16) continua válida. Dessa forma, pelos mesmos argumentos citados anteriormente, a energia de um modelo de brana com dois campos escalares é nula.

Quanto à estabilidade, na tese de Altemar Lobão [68] e na Ref. [69] podemos encontrar uma análise detalhada sobre a estabilidade de branas com um número qualquer de campos. A conclusão é que a equação de estabilidade da brana é do tipo Schrödinger. Ela pode ser fatorizada e, por só possuir autovalores não-negativos, um modelo de brana com um número qualquer de campos é estável.

7.2.1 Bloch Brane

A fim de exemplificar um modelo de brana com dois campos, estudaremos um modelo segundo a Ref. [70]. A função auxiliar $W = W(\phi, \chi)$ para esse modelo tem uma forma semelhante a do modelo BNRT estudado no capítulo 2:

$$W_r(\phi, \chi) = 2\phi - \frac{2}{3}\phi^3 - 2r\phi\chi^2, \quad (7.49)$$

cujos mínimos estão nos pontos $(\pm 1, 0)$ e $(0, \pm 1/\sqrt{r})$. Aqui, r é um parâmetro real positivo. Nesse caso, o potencial fica dado por

$$V_r(\phi, \chi) = \frac{1}{2} [(1 - \phi^2 - r\chi^2)^2 + 4r^2\phi^2\chi^2] - \frac{4}{3} \left(\phi - \frac{\phi^3}{3} - r\phi\chi^2 \right)^2. \quad (7.50)$$

As equações de primeira ordem para esse modelo ficam

$$\phi' = 1 - \phi^2 - r\chi^2, \quad (7.51a)$$

$$\chi' = -2r\phi\chi. \quad (7.51b)$$

Note que essas equações são as mesmas equações encontradas para o modelo BNRT no espaço plano. Tomando a órbita elíptica

$$\phi^2 + \frac{r}{1-2r}\chi^2 = 1, \quad (7.52)$$

vemos que as soluções conectando os mínimos $(\pm 1, 0)$ no espaço dos campos são

$$\phi_r(y) = \tanh(2ry) \quad (7.53a)$$

e

$$\chi_r(y) = \pm \sqrt{\frac{1}{r} - 2} \operatorname{sech}(2ry). \quad (7.53b)$$

Usando essas soluções, podemos encontrar a warp function:

$$A_r(y) = \frac{1}{9r} [(1 - 3r) \tanh^2(2ry) - 2 \ln \cosh(2ry)]. \quad (7.54)$$

A densidade de energia apresenta uma expressão complexa, por isso a omitiremos aqui. Na Fig. 7.3, podemos ver os gráficos das soluções para os campos, do warp factor e da densidade de energia para alguns valores de r . Numericamente, observa-se que para $0.17 \leq r < 0.5$ a densidade de energia tem um único pico dentro da brana. Contudo, para $r \approx r_c = 0.17$, surge um platô. No intervalo $0 < r < r_c$, a densidade de energia passa a exibir dois picos. O valor de r_c agora é menor do que no caso plano devido ao acoplamento com a gravidade. Contudo, o comportamento é o mesmo que o presente na Fig. 2.7 do capítulo 2 para o espaço plano.

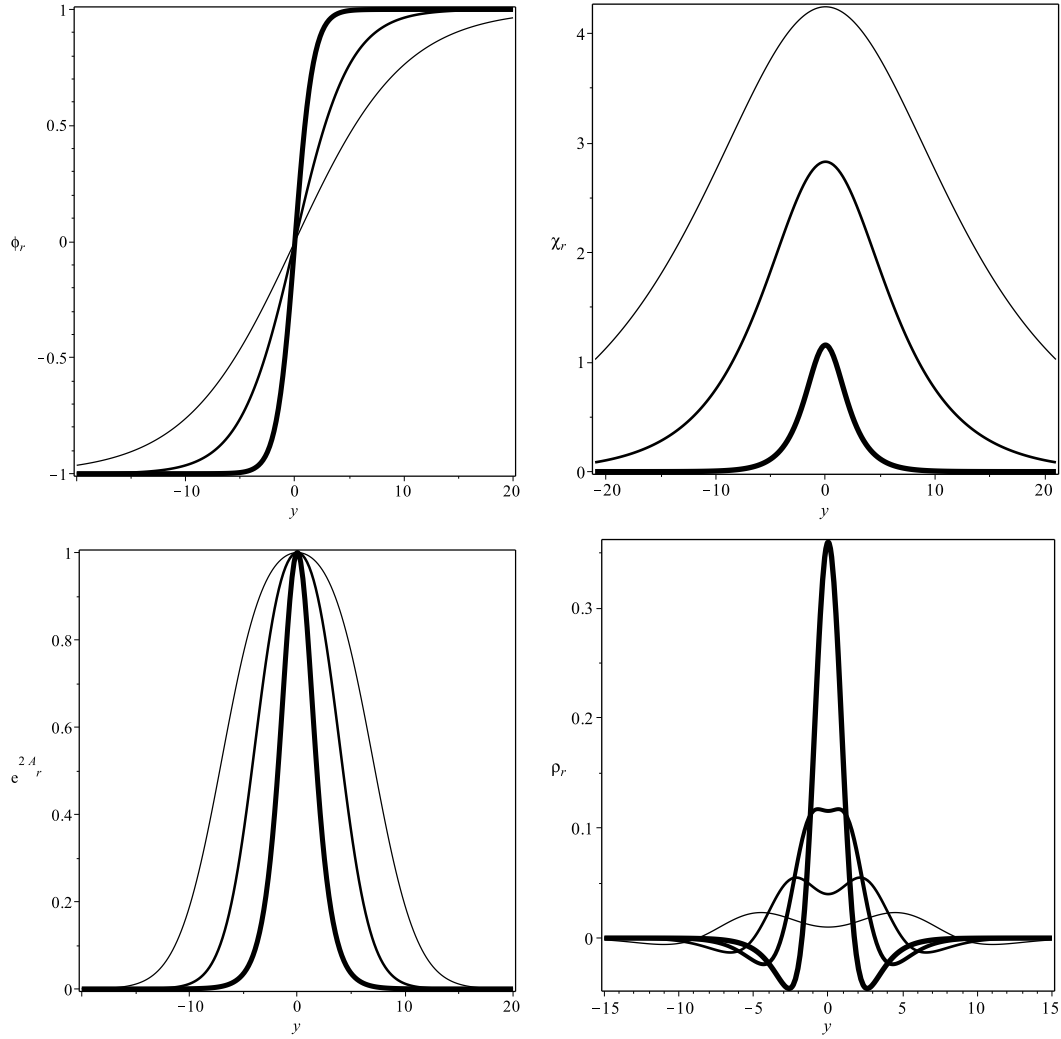


Figura 7.3 À esquerda superior, vemos a solução presente na Eq. (7.53a). O gráfico à direita superior contém a solução presente na Eq. (7.53b). O plot à esquerda inferior exibe o warp factor com a warp function presente na Eq. (7.54). A figura restante nos mostra o comportamento da densidade de energia. Em todos os gráficos, temos $r = 0.05, 0.1$ e 0.3 (exceto na densidade de energia, em que usamos $r = 0.05, 0.1, 0.17$ e 0.3) com a espessura da linha aumentando com r .

PARTE II

Novos Resultados

De Kinks para Compactons

Os capítulos da Parte I foram de revisão e formam uma base na área de teoria clássica de campos. Como vimos no Cap. 2, os kinks são as estruturas topológicas mais simples e aparecem em (1,1) dimensões espaço-temporais. Os kinks também podem ser usados para modelar a quinta dimensão em modelos de mundo brana com uma dimensão extra infinita (ver Cap. 7). Compactons primeiramente apareceram em modelos que continham dispersão não-linear. Porém, como não há uma maneira de incluir dispersão não-linear em sistemas relativísticos governados pela dinâmica padrão, eles são difíceis de ser encontrados no cenário usual. No Cap. 3, apresentamos compactons em modelos com dinâmica modificada.

Neste capítulo, tratamos o artigo [71], no qual desenvolvemos um procedimento para ir suavemente de kinks para compactons em modelos com a dinâmica padrão. Isso é possível introduzindo-se um parâmetro que pode ser real ou inteiro. Primeiramente, apresentamos potenciais simétricos com uma característica importante: tanto sua altura em $\phi = 0$, que é um máximo local, como seus mínimos são os mesmos para qualquer valor do parâmetro. A seguir, para irmos à estrutura compacta, tomamos valores cada vez maiores desse parâmetro. Isso fará a massa das excitações elementares aumentar. Logo após, estudamos a estabilidade linear numericamente plotando o gráfico dos estados ligados como função do parâmetro. Finalmente, mostramos como esse procedimento funciona no mundo brana e vemos que a brana apresenta um caráter híbrido.

8.1 Generalidades

Para investigarmos o problema, usemos o cenário da seção 2.1. A densidade lagrangiana padrão para um campo escalar tem a forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi). \quad (8.1)$$

A métrica é $(+, -)$, $\mu = 0, 1$, e ϕ é um campo escalar real. $V(\phi)$ é o potencial. Na seção 2.1.4.1, apresentamos o modelo ϕ^4 :

$$V(\phi) = \frac{1}{2} (1 - \phi^2)^2, \quad (8.2)$$

cujos mínimos estão em $v_\pm = \pm 1$ e o máximo está na origem, tal que $V(0) = 1/2$. Além disso, temos as massas dadas por $m_-^2 = m_+^2 = m^2 = 4$, e a solução do tipo kink, centrada na origem, sendo

$$\phi(x) = \tanh(x), \quad (8.3)$$

A densidade de energia tem a forma

$$\rho = \text{sech}^4(x), \quad (8.4)$$

que fornece energia $E = 4/3$. Neste caso, o potencial de estabilidade é dado por

$$U(x) = 4 - 6\text{sech}^2(x), \quad (8.5)$$

que possui dois estados ligados: o modo zero, com $\omega_0 = 0$, e um estado excitado, com $\omega_1^2 = 3$.

Para vermos como kinks compactos aparecem em modelos relativísticos, tomamos a mesma direção da seção 3.1.1. A densidade lagrangiana considerada, então, é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi)^2 - V(\phi), \quad (8.6)$$

Como vimos na seção 3.2.1, quando escolhemos o potencial do tipo ϕ^4 :

$$V(\phi) = \frac{3}{4}(1 - \phi^2)^2, \quad (8.7)$$

obtemos o kink compacto

$$\phi_c(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x > \pi/2; \\ \sin(x) & \text{for } |x| \leq \pi/2; \\ -1 & \text{for } x < -\pi/2. \end{cases} \quad (8.8)$$

A densidade de energia é dada por

$$\rho_c(x) = \begin{cases} \cos^4(x), & |x| \leq \pi/2, \\ 0, & |x| > \pi/2. \end{cases} \quad (8.9)$$

A energia é $E_c = 3\pi/8$. A estabilidade desse modelo foi estudada na seção recém citada. O potencial de estabilidade é do tipo Pöschl-Teller (ver seção 3.2.1), que só suporta estados ligados.

É difícil entender como ir de kinks para compactons com cenários tão distintos. O primeiro fato a ser observado é que a densidade de energia (8.4) do kink vai assintoticamente a zero na forma $\exp(-4x)$, que depende da massa das excitações elementares. Logo, para fazer o kink compactificar, devemos fazer a massa crescer para valores cada vez maiores. De fato, vemos da Eq. (2.28), que se a massa aumenta cada vez mais, o potencial muda, tendendo a se comportar como um poço infinito e, portanto, localizando as flutuações em um espaço compacto. Por isso, se quisermos ir de kinks para compactons, devemos modificar o potencial de uma maneira pela qual a massa mude para valores cada vez maiores. Construímos dois modelos, que serão apresentados abaixo.

8.2 Modelo 1

O primeiro modelo a ser considerado é

$$\mathcal{L}_\alpha = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V_\alpha(\phi), \quad (8.10)$$

com o potencial

$$V_\alpha(\phi) = \frac{1}{2\alpha} \left(\sqrt{1 + 4\alpha(1 + \alpha/2)V(\phi)} - 1 \right). \quad (8.11)$$

Aqui, α é um parâmetro real não-negativo e $V(\phi)$ é o potencial ϕ^4 dado pela Eq. (8.2). Para a equação de movimento, nós temos

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{1 + \alpha/2}{\sqrt{1 + 4\alpha(1 + \alpha/2)V(\phi)}} \frac{dV}{d\phi}. \quad (8.12)$$

Como o lado direito é a derivada de $V_\alpha(\phi)$, nós vemos que os extremos de $V(\phi)$ também são extremos de $V_\alpha(\phi)$. Temos ainda que

$$\frac{d^2V_\alpha}{d\phi^2} = \frac{(1 + \alpha/2)}{[1 + 4\alpha(1 + \alpha/2)V]^{1/2}} \frac{d^2V}{d\phi^2} - \frac{2\alpha(1 + \alpha/2)^2}{[1 + 4\alpha(1 + \alpha/2)V]^{3/2}} \left(\frac{dV}{d\phi}\right)^2. \quad (8.13)$$

Logo, nos mínimos v_\pm nós chegamos a

$$\left. \frac{d^2V_\alpha}{d\phi^2} \right|_{v_\pm} = (1 + \alpha/2) \left. \frac{d^2V}{d\phi^2} \right|_{v_\pm}, \quad (8.14)$$

que conecta as massas das excitações elementares dos dois modelos. Nós vemos que a massa do novo potencial aumentou suavemente com α . Essa é a propriedade requerida para o potencial e agora mostraremos como o kink se comporta, mudando para a estrutura compacta desejada.

Para α muito pequeno, nós temos

$$V_\alpha^s(\phi) = V(\phi) + \frac{1}{2}\alpha V(\phi)(1 - 2V(\phi)) + \mathcal{O}[\alpha^2]. \quad (8.15)$$

Para $1/\alpha$ muito pequeno, nós temos

$$V_\alpha^l(\phi) = \sqrt{V(\phi)/2} + \frac{1}{2\alpha} \left(\sqrt{2V(\phi)} - 1 \right) + \mathcal{O} \left[\frac{1}{\alpha^2} \right]. \quad (8.16)$$

No limite $\alpha \rightarrow 0$, encontramos $V(\phi)$. Tomamos esse limite como o do kink usual. De acordo com nossa sugestão, tomamos o limite $1/\alpha \rightarrow 0$ como o limite para o compacto. Aqui, temos

$$V_c(\phi) = \sqrt{V(\phi)/2}, \quad (8.17)$$

como o limite compacto. Nesse caso, o potencial se torna

$$V_c(\phi) = \frac{1}{2}|1 - \phi^2|, \quad (8.18)$$

Neste modelo, na dinâmica usual, o kink compacto tem exatamente a mesma forma da Eq. (9.18). Contudo, a densidade de energia é diferente e tem a forma

$$\rho_c(x) = \begin{cases} \cos^2(x), & |x| \leq \pi/2 \\ 0, & |x| > \pi/2 \end{cases} \quad (8.19)$$

tal que a energia é $E_c^1 = \pi/2$.

No limite compacto, o potencial de estabilidade tem a forma

$$U_c(x) = \begin{cases} -1, & |x| < \pi/2 \\ \infty, & |x| \geq \pi/2 \end{cases}. \quad (8.20)$$

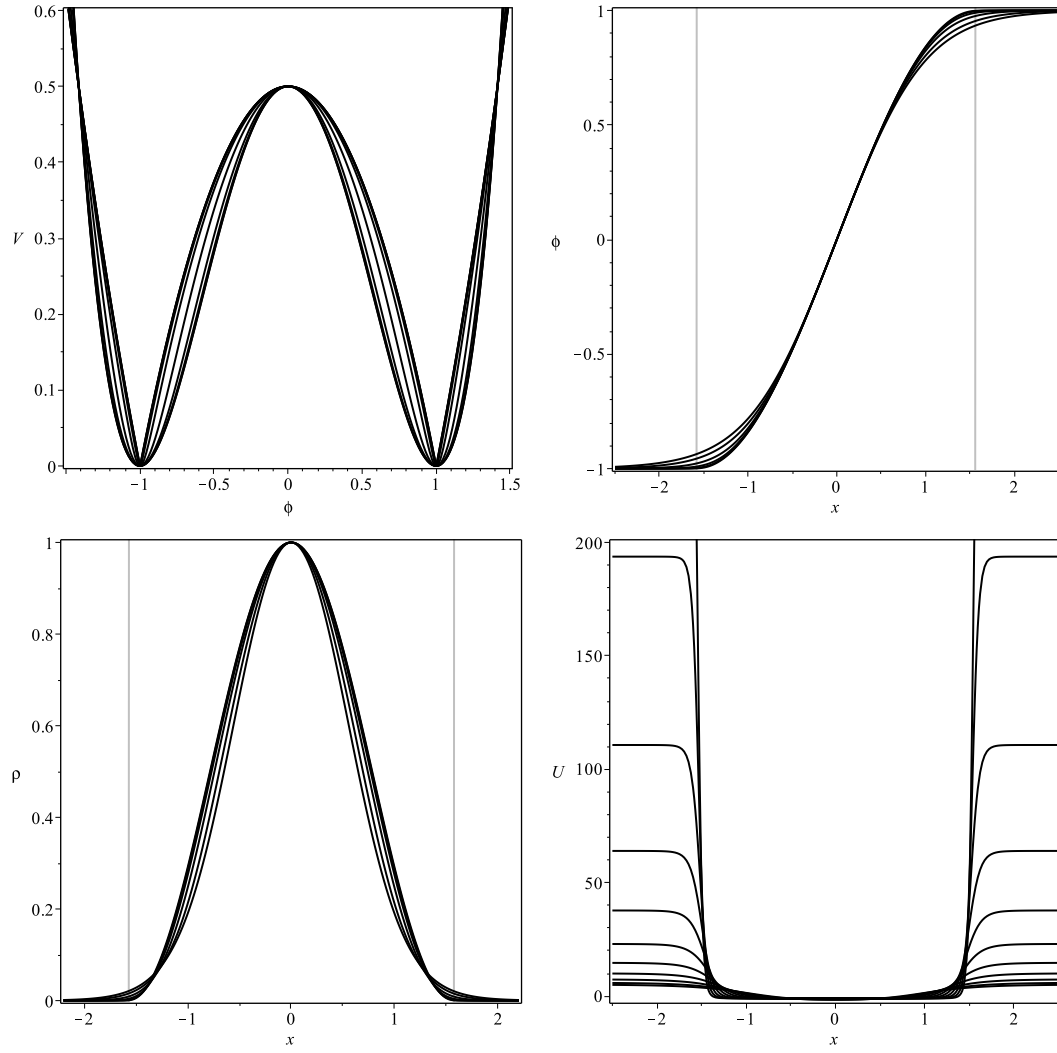


Figura 8.1 O potencial (8.11) (esquerda superior), a solução tipo kink (direita superior), a densidade de energia (esquerda inferior) e o potencial de estabilidade (direita inferior), plotados para $\alpha = 0$ e valores cada vez maiores.

Ele é um poço infinito e suporta um número infinito de estados ligados com energias $\omega_k^2 = k(k+2)$, onde $k = 0, 1, 2, \dots$

Para entendermos como nós vamos suavemente de kinks para compactons neste caso, vamos considerar a equação de movimento (8.12) usando o potencial ϕ^4 . Ela tem a forma

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{(2+\alpha)\phi(1-\phi^2)}{\sqrt{1+\alpha(2+\alpha)(1-\phi^2)^2}}. \quad (8.21)$$

Nós estudamos essa equação numericamente e na Fig. 8.1 plotamos o potencial, a solução kink da Eq. (9.7) acima, a densidade de energia e o potencial de estabilidade para vários valores de α , incluindo $\alpha = 0$ e outros valores cada vez maiores.

Vamos agora focar na potencial de estabilidade para vermos como ele muda com o aumento de α . Ele está plotado na Fig. 8.1, à direita inferior. É um poço com paredes cada vez maiores, que convergem para a forma (8.20) para grandes valores de α . Nós também exibimos o número de estados ligados como uma função de α na Fig. 8.2. Esse gráfico mostra que o poço fica cada vez mais fundo, adicionando cada vez mais estados

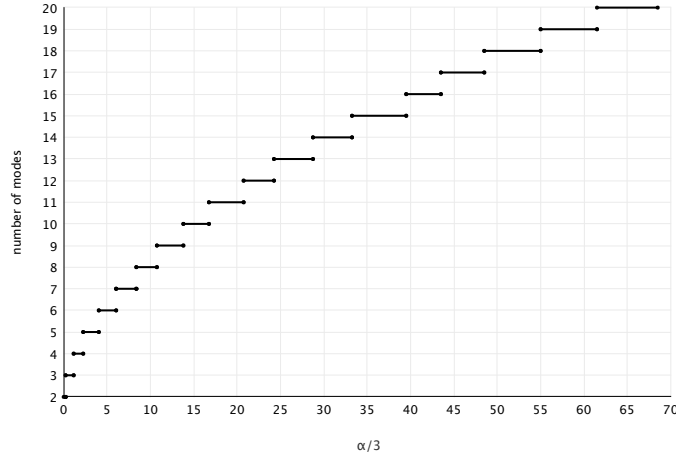


Figura 8.2 Número de estados ligados do potencial de estabilidade do primeiro modelo, plotado como função de α .

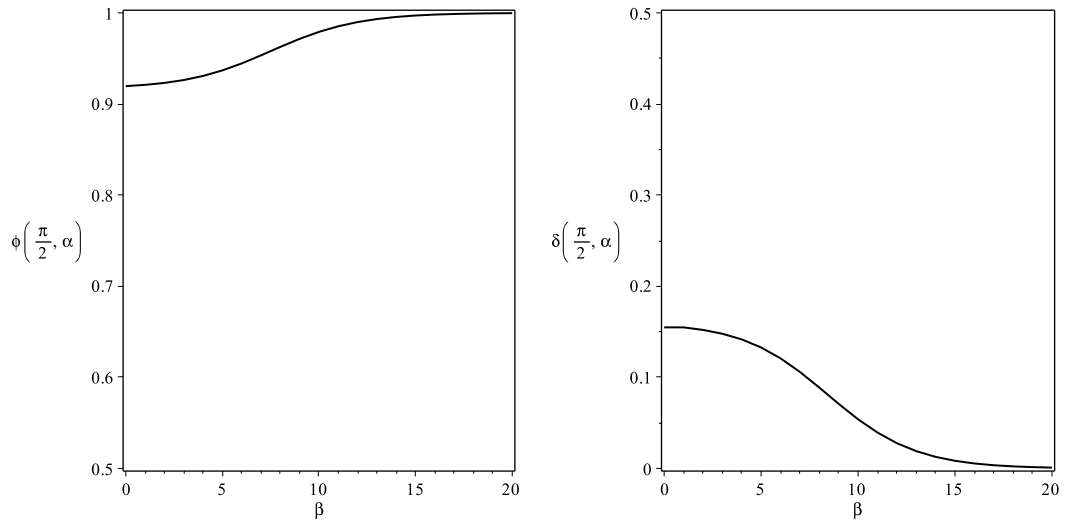


Figura 8.3 Comportamento de $\phi(\pi/2, \alpha)$, a solução kink $\phi(x)$ calculada em $x = \pi/2$ (esquerda) e a energia relativa $\delta(\pi/2, \alpha)$ da solução kink (direita), para vários valores de α . Aqui, nós usamos $\alpha = 0.07 \cdot 1.6^\beta$.

ligados à medida que α cresce.

Para tornar a investigação mais forte, na Fig. 8.3 nós estudamos duas outras quantidades numericamente, uma sendo $\phi(\pi/2, \alpha)$, isto é, o valor da solução kink $\phi(x)$ no ponto $x = \pi/2$, como função de α . A outra, trata a quantidade de energia dentro do intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. Investigamos a quantidade $\delta(\pi/2, \alpha) = 1 - E(\pi/2, \alpha)/E_c^1$, onde E_c^1 é a energia do kink compacto do primeiro modelo e $E(\pi/2, \alpha)$ é a quantidade de energia do kink dentro do intervalo $|x| \leq \pi/2$. Os resultados mostram que a solução kink vai para 1 em $x = \pi/2$, para valores cada vez maiores de α , e que a quantidade de energia do kink dentro do intervalo compacto $|x| \leq \pi/2$ vai exatamente para a energia da solução compacta. Esses resultados confirmam que o kink se compactifica à medida que α cresce.

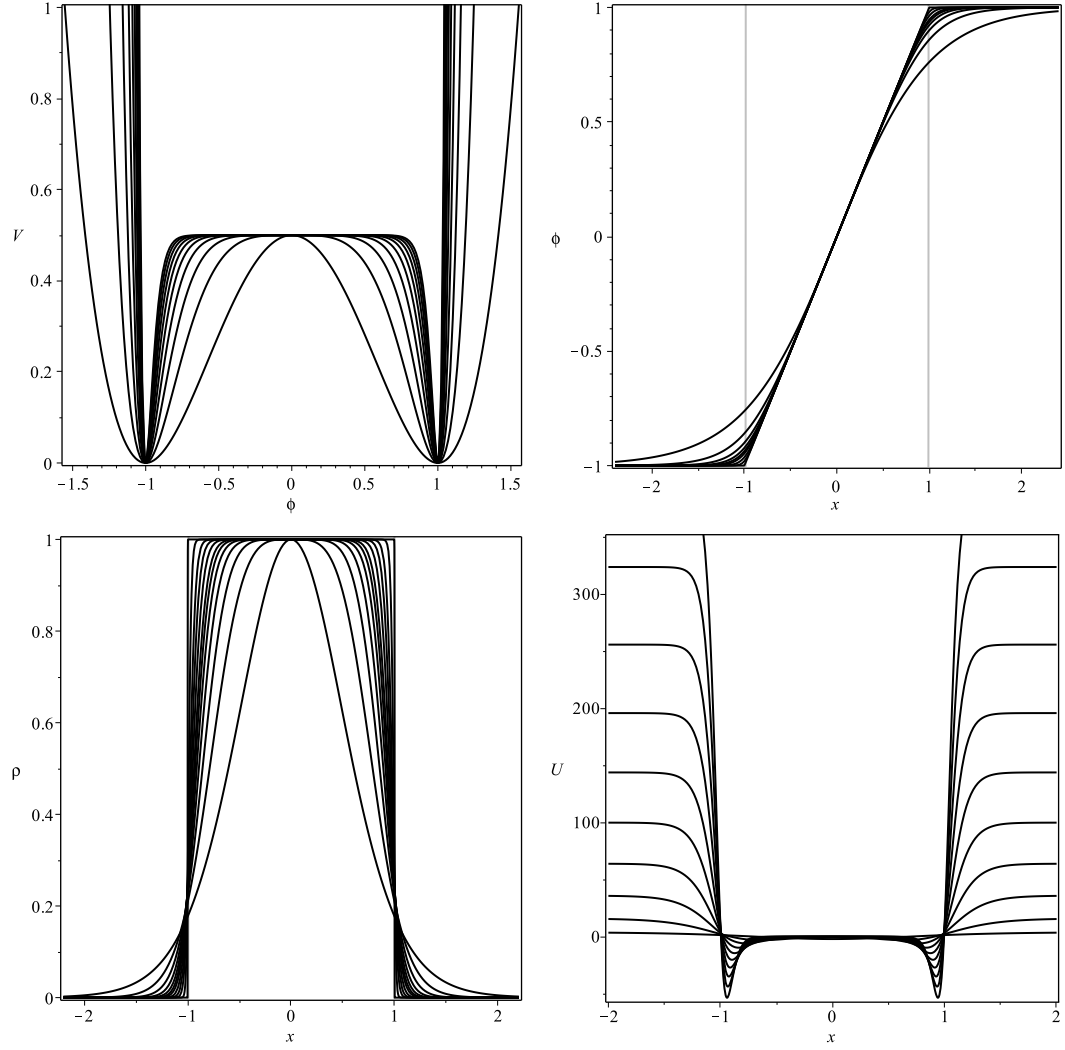


Figura 8.4 O potencial (8.23) (esquerda superior), sua solução correspondente (direita superior), densidade de energia (esquerda inferior) e o potencial de estabilidade (direita inferior), plotados para $n = 1$ e valores cada vez maiores.

8.3 Modelo 2

Vamos agora considerar outro modelo, descrito pela densidade lagrangiana

$$\mathcal{L}_n = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V_n(\phi), \quad (8.22)$$

onde o potencial é dado por

$$V_n(\phi) = \frac{1}{2} (1 - \phi^{2n})^2, \quad (8.23)$$

com n sendo um número natural não-nulo. Para $n = 1$, nós retornamos ao modelo ϕ^4 . Esse modelo é diferente do anterior e seu parâmetro agora é discreto.

A equação de movimento para esse modelo é

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = -2n \phi^{2n-1} (1 - \phi^{2n}). \quad (8.24)$$

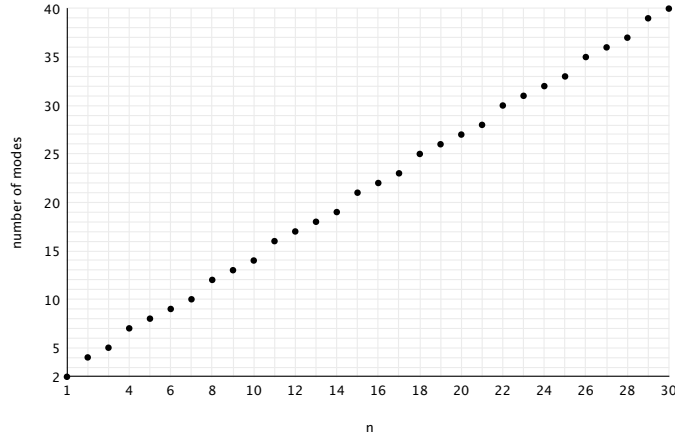


Figura 8.5 Número de estados ligados do potencial de estabilidade do segundo modelo, plotado como uma função de n .

A derivada segunda do potencial é

$$\frac{d^2V}{d\phi^2} = 4n^2\phi^{4n-2} - 2n(2n-1)\phi^{2n-2}(1-\phi^{2n}). \quad (8.25)$$

Esse potencial tem o mesmo conjunto de mínimos do potencial ϕ^4 , mas agora a massa é tal que $m_n^2 = 4n^2$. A equação de movimento para n muito grande é dada por

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -2n\phi^{2n}(1-\phi^{2n}). \quad (8.26)$$

Ela admite a solução

$$\phi_c(x) = \begin{cases} 1, & \text{for } x > 1; \\ x, & \text{for } |x| \leq 1; \\ -1, & \text{for } x < -1. \end{cases} \quad (8.27)$$

Isso é um kink compacto com a densidade de energia na forma

$$\rho_c(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}. \quad (8.28)$$

A energia é $E_c^2 = 2$. O potencial de estabilidade no limite compacto se torna

$$U_c(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ -\infty, & x = \pm 1 \\ \infty, & |x| > 1 \end{cases}. \quad (8.29)$$

Nós resolvemos a equação de movimento (8.24) numericamente e, na Fig. 8.4, nós plotamos o potencial (esquerda superior), a solução kink (direita superior), a densidade de energia (esquerda inferior) e o potencial de estabilidade (direita inferior) para vários valores de n .

Nós focamos no potencial de estabilidade para entendermos como ele muda com o aumento de n . Ele está plotado na Fig. 8.4, à direita inferior. É um poço com paredes que aumentam e converge para a forma (8.29) para valores de n muito grandes. Nós

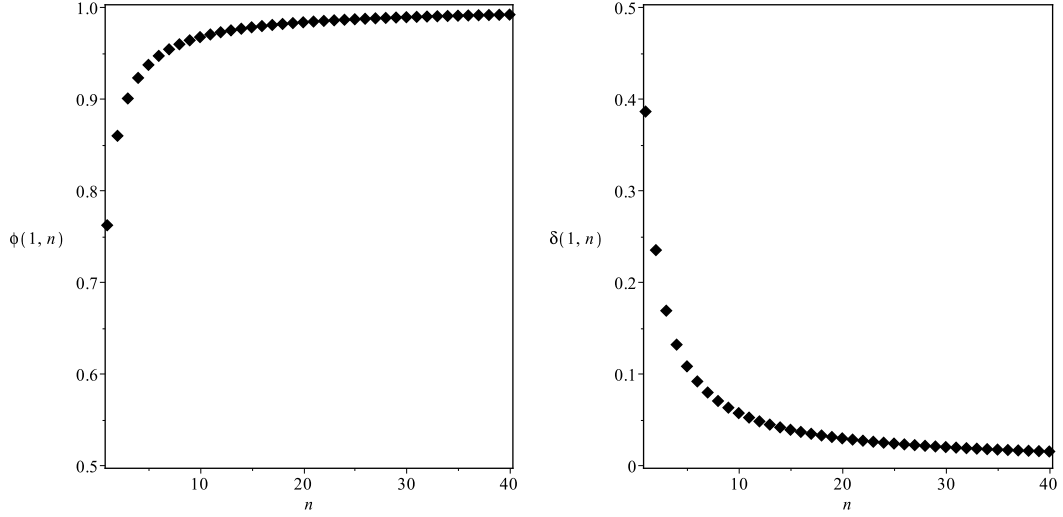


Figura 8.6 Comportamento de $\phi(1, n)$, a solução kink $\phi(x)$ calculada em $x = 1$ (esquerda) e a energia relativa $\delta(1, n)$ da solução kink (direita), para vários valores de n .

também plotamos o número de estados ligados como função de n na Fig. 8.5, que mostra o aumento do número de estados ligados com n , sugerindo que as paredes do potencial aumentam, adicionando cada vez mais estados ligados com o aumento de n .

Na Fig. 8.6, nós estudamos duas outras quantidades numericamente. Uma delas, é $\phi(1, n)$, isto é, o valor a solução kink $\phi(x)$ no ponto $x = 1$ como uma função de n . A outra quantidade é a energia dentro do intervalo $[-1, 1]$. Nós estudamos $\delta(1, n) = 1 - E(1, n)/E_c^2$, onde E_c^2 é a energia do kink compacto do segundo modelo, e $E(1, n)$ é a quantidade de energia do kink dentro do intervalo $|x| \leq 1$. Os resultados mostram que o kink tende a 1 em $x = 1$ para valores cada vez maiores de n , e que a quantidade de energia do kink dentro do intervalo compacto $|x| \leq 1$ vai exatamente para a energia da solução compacta quando tomamos valores cada vez maiores de n . Isso confirma que o kink usual tende a uma estrutura compacta à medida que n cresce.

8.4 Brana Híbrida

Vamos agora considerar o campo escalar no cenário estudado no Cap. 7: o campo escalar está numa geometria AdS_5 com uma dimensão extra infinita. A ação de Einstein-Hilbert nesse caso tem a mesma forma presente na Eq. (7.1). Como sabemos, o elemento de linha desse modelo de brana é dado pela Eq. (7.3). Nós ilustramos esse caso usando o segundo modelo, com \mathcal{L}_n definido pelas Eqs. (8.22) e (8.23). O potencial $V_n(\phi)$ pode ser escrito como

$$V_n(\phi) = \frac{1}{2} \left(\frac{dW_n}{d\phi} \right)^2; \quad W_n(\phi) = \phi - \frac{\phi^{2n+1}}{2n+1}. \quad (8.30)$$

Nós supomos que o campo escalar dependa apenas da dimensão extra, isto é, $\phi = \phi(y)$. Nesse caso, obtemos a mesma equação de movimento do campo escalar presente em Eq. (7.11) e as equações de Einstein em Eqs. (7.15).

As equações são fortemente acopladas e de difícil solução. Para simplificar o problema,

usamos equações de primeira ordem. Para isso, tomamos

$$\frac{dA}{dy} = -\frac{2}{3}W(\phi); \quad \frac{d\phi}{dy} = \frac{dW}{d\phi}. \quad (8.31)$$

Note que as equações acima apresentam fatores numéricos diferentes dos presentes nas equações apresentadas no Cap. 7. Fizemos isso por conveniência. Essas equações de primeira ordem resolvem as equações de movimento se o potencial for escrito como

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \left(\frac{dW}{d\phi} \right)^2 - \frac{4}{3} W^2(\phi). \quad (8.32)$$

Nós então usamos W como na Eq. (8.30) para chegar a

$$V(\phi) = \frac{1}{2} (1 - \phi^{2n})^2 - \frac{4}{3} \phi^2 \left(1 - \frac{\phi^{2n}}{2n+1} \right)^2, \quad (8.33)$$

o qual podemos ver na Fig. 8.7. Esse é o potencial no espaço-tempo curvo. Ele é tal que $V(\pm 1) = -(4/3)(2n/(2n+1))^2$, o qual tende a $-4/3$ para valores muito grandes de n .

As soluções para o campo escalar são as mesmas para o modelo 2, estudado no espaço-tempo plano. Elas foram obtidas numericamente e estão plotadas na Fig. 8.7. Além disso, podemos usar as equações de primeira ordem para escrever a warp function em termos do campo escalar, na forma

$$A(\phi) = -\frac{1}{3} \frac{\phi^2}{2n+1} - \frac{2n\phi^2}{3} \frac{{}_2F_1(1, \frac{1}{n}; 1 + \frac{1}{n}; \phi^{2n})}{2n+1}, \quad (8.34)$$

onde ${}_2F_1$ é a função hipergeométrica. Além disso, podemos escrever a densidade de energia na forma

$$\rho = e^{2A} \left(\left(\frac{dW}{d\phi} \right)^2 - \frac{4}{3} W^2 \right). \quad (8.35)$$

Nós podemos usar o campo escalar $\phi = \phi(y)$ para plotar o warp factor e a densidade de energia como funções de y , como mostramos na Fig. 8.7. Como o kink transmuta para seu compacto para grandes valores de n , nós percebemos que o warp factor decai como no caso da brana fina (thin brane), quando a dimensão extra vai para fora do intervalo compacto $[-1, 1]$. Na verdade, para n muito grande, no limite em que o kink se compactifica, a warp function assume a forma

$$A(y) = \begin{cases} -\frac{1}{3}y^2, & |y| \leq 1, \\ -\frac{2}{3}|y| + \frac{1}{3}, & |y| > 1. \end{cases} \quad (8.36)$$

No mesmo limite, a warp function pode ser usada para escrever a densidade de energia analiticamente, como

$$\rho(y) = e^{2A(y)} \begin{cases} -\frac{4}{3}y^2 + 1, & |y| \leq 1, \\ -\frac{4}{3}, & |y| > 1. \end{cases} \quad (8.37)$$

Nós vemos da expressão acima que, nesse mesmo limite a densidade de energia possui uma discontinuidade finita. Contudo, ela é integrável e fornece energia total nula, como acontece na brana espessa (thick brane).

O perfil do mundo brana para esse modelo apresenta um comportamento diferente do caso de brana espessa usual. Aqui, a brana é espessa quando a dimensão extra está dentro do espaço compacto $[-1, 1]$, mas passa a ser fina quando a dimensão extra está fora do espaço compacto $[-1, 1]$. Nós chamamos essa configuração híbrida de **Brana Híbrida**. Ela é estável conforme o estudo já apresentado no Cap. 7.

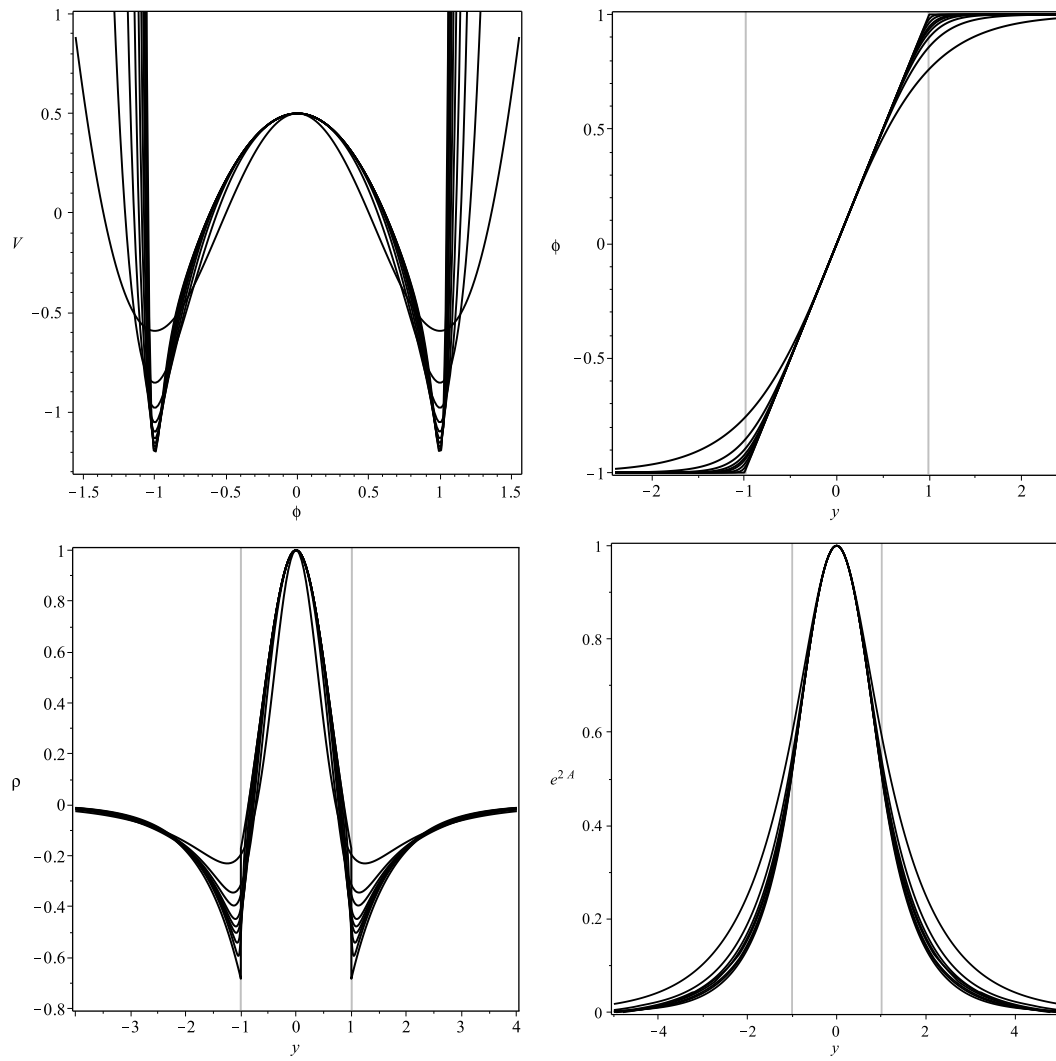


Figura 8.7 O potencial (8.33) (esquerda superior), a solução do campo escalar (direita superior), densidade de energia (esquerda inferior) e o warp factor (direita inferior), plotados para $n = 1$ e valores crescentes.

Estruturas Compactas em Teoria de Campos Usual

No capítulo anterior, vimos uma maneira de transitar de kinks para compactons. No capítulo 3, estudamos compactons, porém em modelos com dinâmica modificada. Aqui, apresentaremos a Ref. [72], na qual mostramos a existência de estruturas compactas em modelos com dinâmica padrão.

Em modelos relativísticos, as investigações em [73] vão contra a sugestão de que compactons necessitam de dispersão não linear. Isso, embora seja interessante, exige uma característica um tanto artificial: o potencial deve ter a forma em V . Aqui, em vez de usar essa característica, aproveitamos o trabalho realizado em [74] onde se introduziu uma classe especial de potenciais que dão origem às soluções de duplo kink. Nós mostramos que podemos obter soluções compactas a partir disso, com a densidade de energia nula fora do espaço compacto.

Para resolver as equações diferenciais não lineares que aparecem nos problemas, usamos o método da deformação já apresentado no Cap. 2 e construímos novas estruturas compactas em modelos descritos por um campo escalar real em $(1,1)$ dimensões espaço-temporais. Nós partimos do modelo χ^4 usual com quebra espontânea de simetria e, em seguida, fazemos deformação para obter novos modelos. Nas três seções seguintes, revisitemos o método da deformação e apresentaremos os modelos, bem como suas soluções. Por fim, encerramos o capítulo investigando a estabilidade linear para cada caso.

9.1 O procedimento

Nós iniciamos a investigação com a densidade lagrangiana para o modelo usual de um campo escalar em $(1,1)$ dimensões espaço-temporais, na métrica $(+, -)$:

$$\mathcal{L}(\chi, \partial_\mu \chi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - U(\chi), \quad (9.1)$$

onde

$$U(\chi) = \frac{1}{2} (1 - \chi^2)^2. \quad (9.2)$$

Esse é o modelo χ^4 estudado na seção 2.1.4.1. Sua solução é $\chi(x) = \tanh(x)$, com densidade de energia $\rho(x) = \text{sech}^4(x)$ e energia $E = 4/3$.

O método da deformação nos mostra como introduzir outro modelo, descrito pelo novo campo $\phi = \phi(x, t)$ e caracterizado pela densidade lagrangiana

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (9.3)$$

onde $V(\phi)$ é o novo potencial. O ingrediente chave aqui é a função inversível $f = f(\phi)$ que conecta os modelos (9.1) com o novo modelo (9.3). Como vimos no capítulo 2, isso é

feito relacionando os potenciais $U(\chi)$ e $V(\phi)$ na forma

$$V(\phi) = \frac{U(\chi \rightarrow f(\phi))}{(df/d\phi)^2}. \quad (9.4)$$

Aqui, $U(\chi \rightarrow f(\phi))$ significa trocar χ por $f(\phi)$ em $U(\chi)$. Isso permite mostrar que, se a solução $\chi(x)$ do modelo de partida obedece à equação de movimento

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} = \frac{dU}{d\chi}, \quad (9.5)$$

então, o novo modelo tem uma solução estática dada por

$$\phi(x) = f^{-1}(\chi(x)), \quad (9.6)$$

que obedece a

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{dV}{d\phi}. \quad (9.7)$$

Após esta revisita ao procedimento já apresentado no Cap. 2, vamos considerar algumas funções $f = f(\phi)$ específicas para construir novos modelos com suas respectivas soluções.

9.2 Modelo 1

Nós primeiro consideramos a função de deformação

$$f_1(\phi) = a + \phi^{1/p}, \quad (9.8)$$

onde $0 \leq a < 1$ e $p = 3, 5, 7, \dots$. O potencial do novo modelo é dado por

$$V = \frac{1}{2}p^2\phi^{2-2/p} \left(1 - (a + \phi^{1/p})^2\right)^2, \quad (9.9)$$

que possui três mínimos: $\bar{\phi}_1 = -(1+a)^p$, $\bar{\phi}_2 = 0$, e $\bar{\phi}_3 = (1-a)^p$. Nós plotamos o potencial na Fig. 9.1 para alguns valores dos parâmetros a e p .

Nós usamos esse modelo e a função de deformação inversa (9.8) para obter a solução de duplo kink, conectando os mínimos ϕ_1 e ϕ_3 . Eles são dados por

$$\phi_{\pm}(x) = -(a \pm \tanh(x))^p. \quad (9.10)$$

Plotamos tais estruturas para valores específicos de a e p na Fig. 9.2. Além disso, pode-se notar que, para $a = 0$, o modelo é o introduzido em [74], e contém simetria Z_2 , com soluções $\tanh^p(x)$. É interessante ressaltar que soluções desse tipo aparecem em materiais magnéticos com geometrias vinculadas [75]. O potencial (9.9) descreve situações mais gerais, nas quais $a \neq 0$.

Notamos ainda que, para $\bar{x} = \arctanh(a)$, as soluções cima são tais que $\phi'_-(x) = \phi''_-(x) = 0$ em $x = \bar{x}$, e $\phi'_+(x) = \phi''_+(x) = 0$ em $x = -\bar{x}$; também, $V' = 0$ em $\phi = 0$. Isso possibilita cortar as soluções (9.10), ϕ_- em $x = \bar{x}$ e ϕ_+ em $x = -\bar{x}$ para se obter half-compactons que também resolvem a equação de movimento correspondente. Explicitamente, conectando os mínimos ϕ_1 e ϕ_2 , nós temos

$$\phi_{1-}^{hc}(x) = \begin{cases} -(a - \tanh(x))^p; & x \leq \bar{x}, \\ 0; & x > \bar{x}, \end{cases} \quad (9.11a)$$

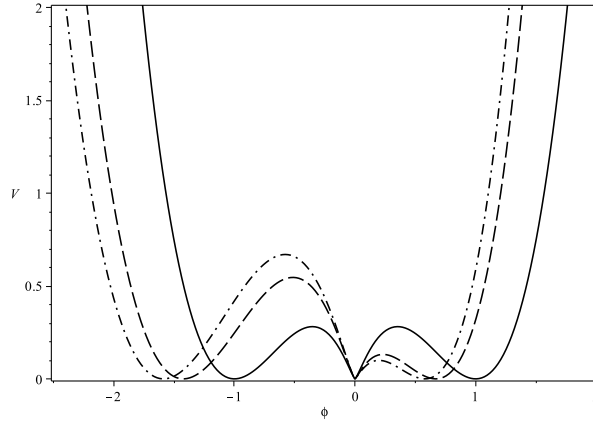


Figura 9.1 O potencial do modelo 1, para $p = 3$ e para $a = 0$ (linha sólida), $a = 1/8$ (linha tracejada), and $a = 1/6$ (linha tracejada e pontilhada).

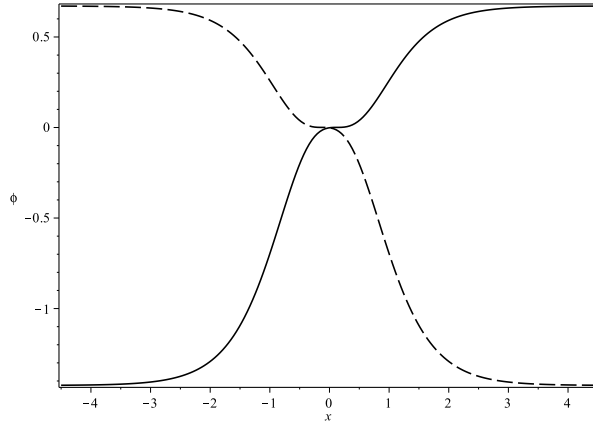


Figura 9.2 As soluções (9.10), plotadas para $p = 3$ e $a = 1/8$.

e

$$\phi_{1+}^{hc}(x) = \begin{cases} 0; & x < -\bar{x}, \\ -(a + \tanh(x))^p; & x \geq -\bar{x}, \end{cases} \quad (9.11b)$$

Também, conectando os mínimos $\bar{\phi}_2$ e $\bar{\phi}_3$ nós temos

$$\phi_{2-}^{hc}(x) = \begin{cases} 0; & x < \bar{x}, \\ -(a - \tanh(x))^p; & x \geq \bar{x}, \end{cases} \quad (9.12a)$$

e

$$\phi_{2+}^{hc}(x) = \begin{cases} -(a + \tanh(x))^p; & x \leq -\bar{x}, \\ 0; & x > -\bar{x}. \end{cases} \quad (9.12b)$$

Dos resultados acima, vemos que as derivadas primeira e segunda da solução se anulam, bem como a derivada primeira do potencial. Isso torna possível cortar as soluções e introduzir características de half-compactons. Inspirados nesse resultado, propomos outro modelo.

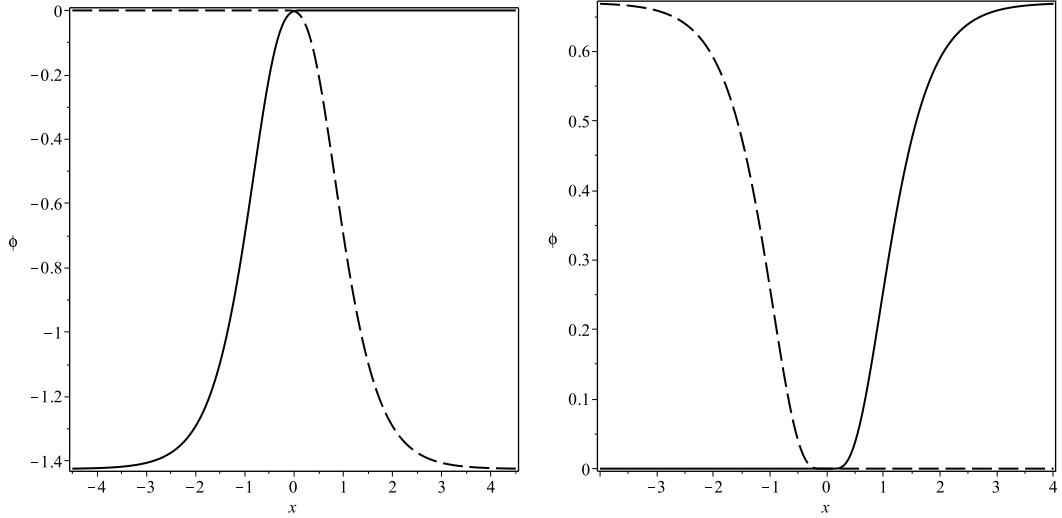


Figura 9.3 As soluções (9.11) (esquerda) e (9.12) (direita), que são half-compactons, plotadas para $p = 3$ e $a = 1/8$.

9.3 Modelo 2

Vamos considerar outra função, dada por

$$f_2(\phi) = b - (1 - \phi^{1/p})^{1/q}, \quad (9.13)$$

onde $0 < b < 1$, $p = 3, 5, 7, \dots$, e $q = 3, 5, 7, \dots$. Neste caso, o novo potencial tem a forma

$$V = \frac{1}{2} p^2 q^2 \phi^{2-2/p} \left(-1 + \phi^{1/p} \right)^{2-2/q} (1 - f_2(\phi)^2)^2. \quad (9.14)$$

Ele contém quatro mínimos: $\bar{\phi}_1 = -((1+b)^q - 1)^p$, $\bar{\phi}_2 = 0$, $\bar{\phi}_3 = 1$, e $\bar{\phi}_4 = ((1-b)^q + 1)^p$. Nós plotamos esse potencial para alguns valores de b , p e q na Fig. 9.4.

Nós tomamos a inversa da função (9.13) para obtermos soluções estáticas conectando os mínimos $\bar{\phi}_1$ e $\bar{\phi}_4$. Eles tem a forma de triplo kink e antikink e são dados por

$$\phi_{\pm}(x) = (1 - (b \pm \tanh(x))^q)^p, \quad (9.15)$$

os quais plotamos na Fig. 9.5 para alguns valores dos parâmetros.

Nós consideramos $\bar{x}_1 = \operatorname{arctanh}(b)$ e $\bar{x}_2 = \operatorname{arctanh}(1-b)$, e vemos que $\phi'_-(x) = \phi''_-(x) = 0$ para $x = \bar{x}_1$ e $x = -\bar{x}_2$, e $\phi'_+(x) = \phi''_+(x) = 0$ para $x = -\bar{x}_1$ e $x = \bar{x}_2$. Além disso, temos que $V' = 0$ em $\phi = 0$ e em $\phi = 1$. Essas propriedades podem ser usadas para cortar as soluções (9.15), ϕ_- em $x = \bar{x}_1$ e $x = -\bar{x}_2$, e ϕ_+ em $x = -\bar{x}_1$ e $x = \bar{x}_2$, logo obtendo soluções do tipo half-compacton e compacton, que também resolvem a equação de movimento correspondente. Então, nós temos o half-compacton conectando os mínimos $\bar{\phi}_1$ e $\bar{\phi}_2$, dado por

$$\phi_{1-}^{hc}(x) = \begin{cases} (1 - (b - \tanh(x))^q)^p; & x \leq -\bar{x}_2, \\ 0; & x > -\bar{x}_2, \end{cases} \quad (9.16a)$$

e

$$\phi_{1+}^{hc}(x) = \begin{cases} 0; & x \leq \bar{x}_2, \\ (1 - (b + \tanh(x))^q)^p; & x \geq \bar{x}_2. \end{cases} \quad (9.16b)$$

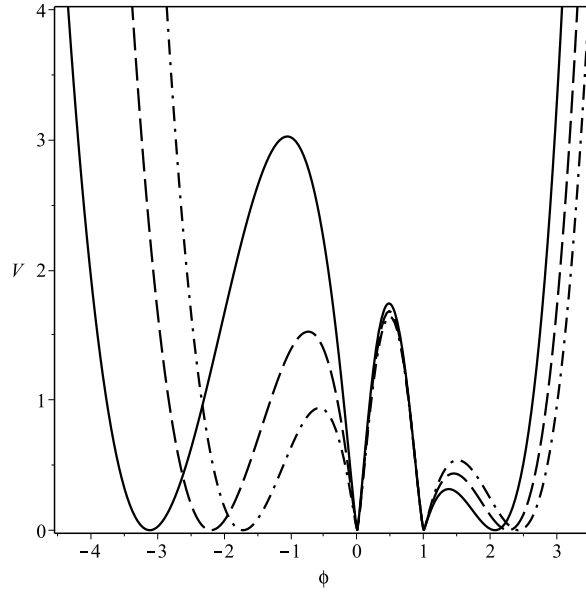


Figura 9.4 O potencial do modelo 2, para $p = q = 3$ e para $b = 0.35$ (linha sólida), $b = 0.32$ (linha tracejada) e $b = 0.30$ (linha tracejada e pontilhada).

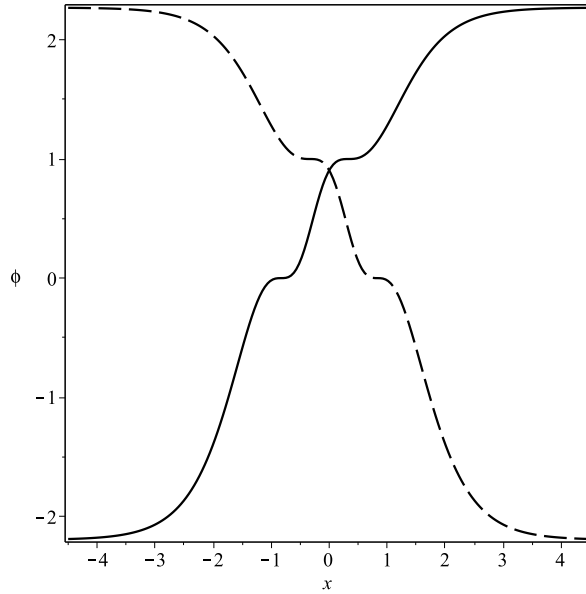


Figura 9.5 As soluções (9.15), que são soluções do tipo triplo kink, plotadas para $p = q = 3$ e $b = 0.32$.

Ainda, conectando os mínimos $\bar{\phi}_3$ e $\bar{\phi}_4$ são

$$\phi_{2-}^{hc}(x) = \begin{cases} 1; & x < \bar{x}_1, \\ (1 - (b - \tanh(x))^q)^p; & x \geq \bar{x}_1, \end{cases} \quad (9.17a)$$

e

$$\phi_{2+}^{hc}(x) = \begin{cases} (1 - (b + \tanh(x))^q)^p; & x \leq -\bar{x}_1, \\ 1; & x > -\bar{x}_1. \end{cases} \quad (9.17b)$$

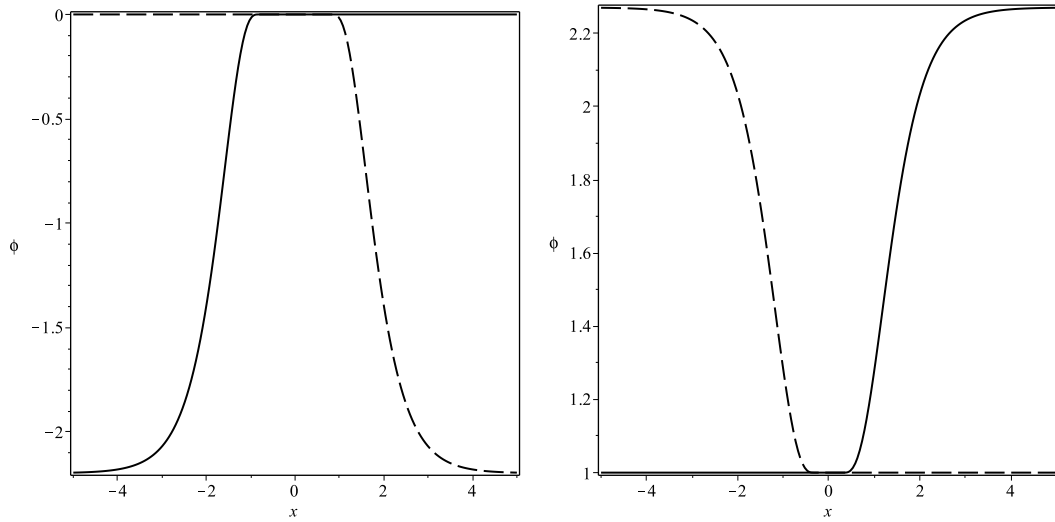


Figura 9.6 As soluções (9.16) (esquerda) e (9.17) (direita), que são half-compactons, plotadas para $p = q = 3$ e $b = 0.32$.

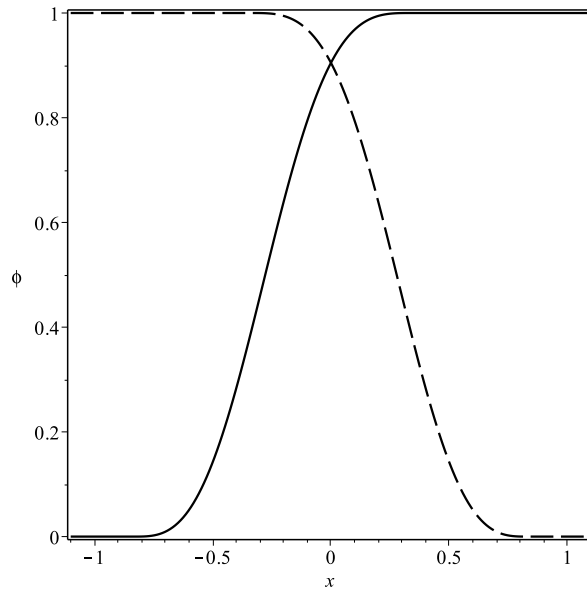


Figura 9.7 As soluções compactas (9.18) plotadas para $p = q = 3$ e $b = 0.32$.

Na Fig. 9.6 nós reproduzimos algumas soluções para $p = q = 3$ e $b = 0.32$.

As soluções compactas aparecem conectando os mínimos $\bar{\phi}_2$ e $\bar{\phi}_3$. Elas são dadas por

$$\phi_{-}(x) = \begin{cases} 0; & x < -\bar{x}_2, \\ (1 - (b - \tanh(x))^q)^p; & -\bar{x}_2 \leq x \leq \bar{x}_1, \\ 1; & x > \bar{x}_1, \end{cases} \quad (9.18a)$$

e

$$\phi_{+}(x) = \begin{cases} 1; & x < -\bar{x}_1, \\ (1 - (b + \tanh(x))^q)^p; & -\bar{x}_1 \leq x \leq \bar{x}_2, \\ 0; & x > \bar{x}_2, \end{cases} \quad (9.18b)$$

que nós mostramos na Fig. 9.7, para $p = q = 3$ e $b = 0.32$.

9.4 Estabilidade Linear

O estudo da estabilidade linear das soluções segue a mesma direção do que foi apresentado na seção 2.1.3. Aqui, faremos apenas um breve resumo. Tomamos

$$\phi(x, t) = \phi(x) + \sum_n \eta_n(x) \cos(w_n t), \quad (9.19)$$

onde $\phi(x)$ é o campo estático e os demais termos são pequenas perturbações. Estabilidade linear significa ter flutuações limitadas no tempo tais que as frequências $\{w_n\}$ sejam números reais.

Usamos o campo (9.19) na equação de movimento para obtermos uma equação do tipo Schrödinger $H\eta_n(x) = w_n^2 \eta_n(x)$, onde

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + U(x) \quad (9.20)$$

é o análogo do hamiltoniano e

$$U(x) = \frac{d^2 V}{d\phi^2} \quad (9.21)$$

é o potencial de estabilidade. Eles devem ser calculados na configuração estática $\phi(x)$.

Como visto na seção 2.1.3, quando os potenciais podem ser escritos em termos da função auxiliar $W = W(\phi)$, o hamiltoniano presente na Eq. (9.20) pode ser fatorizado. Assim, seus autovalores correspondentes são não-negativos, o que garante a estabilidade linear do modelo. A seguir, investigamos explicitamente a estabilidade dos dois modelos estudados.

9.4.1 Modelo 1

Para $a = 0$, o potencial de estabilidade (9.21) tem a forma

$$U(x) = 2 - 20 \operatorname{sech}^2(x) + 2 \tanh^{-2}(x). \quad (9.22)$$

No caso mais geral, com $a \neq 0$, a expressão é muito grande e por isso a omitimos. Na Fig. 9.8 nós plotamos o potencial para $a = 0$ e para $a = 1/8$, para a solução $\phi_-(x)$ da Eq. (9.10). Além disso, o autoestado para o modo zero do mesmo duplo kink de (9.10) é dado por

$$\eta_0(x) = p(a - \tanh(x))^{p-1} \operatorname{sech}^2(x). \quad (9.23)$$

Para o half-compacton (9.11), nós temos

$$\eta_0^{hc}(x) = \begin{cases} p(a - \tanh(x))^{p-1} \operatorname{sech}^2(x), & \text{se } x \leq \bar{x}, \\ 0; & \text{se } x > \bar{x}. \end{cases} \quad (9.24)$$

Eles não tem nós, mostrando a estabilidade do duplo kink e do half-compacton; veja a Fig. 9.9, em que plotamos o modo zero (normalizado) da solução duplo kink.

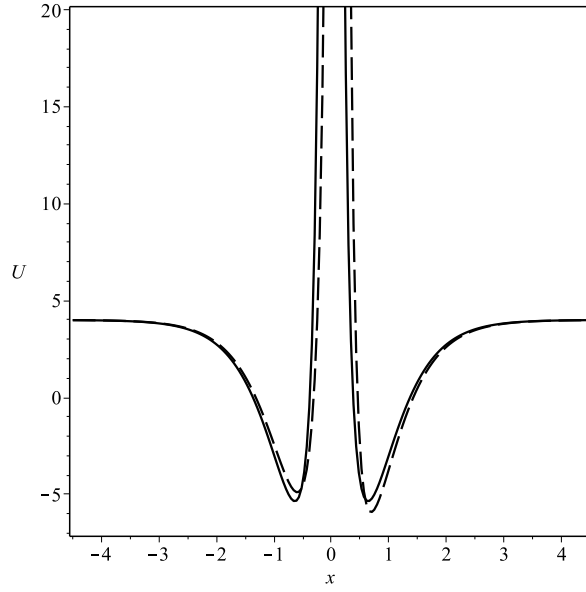


Figura 9.8 O potencial de estabilidade do modelo 1 para as soluções de duplo kink, plotadas para $p = 3$, $a = 0$ (linha sólida) e $a = 1/8$ (linha tracejada).

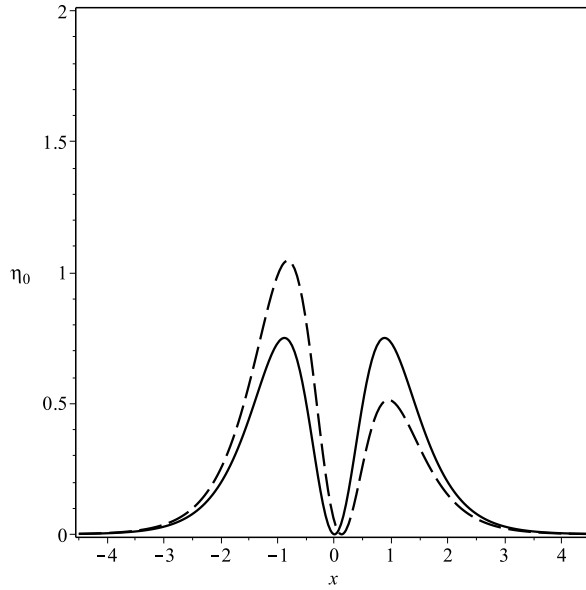


Figura 9.9 O modo zero do duplo kink do modelo 1, plotado para $p = 3$, $a = 0$ (linha sólida) e $a = 1/8$ (linha tracejada).

9.4.2 Modelo 2

Neste caso, o potencial também é estranho. Então, na Fig. 9.10 nós o plotamos para $p = q = 3$ e $b = 0.32$, para $\phi_-(x)$ da Eq. (9.15). O autoestado para o modo zero do mesmo triplo kink de (9.15) é dado por

$$\eta_0(x) = pq(1 + (-b + t(x))^q)^{p-1}(-b + t(x))^{q-1}s^2(x), \quad (9.25)$$

onde estamos usando $t(x) = \tanh(x)$ e $s(x) = \text{sech}(x)$ por simplicidade. Para o half-

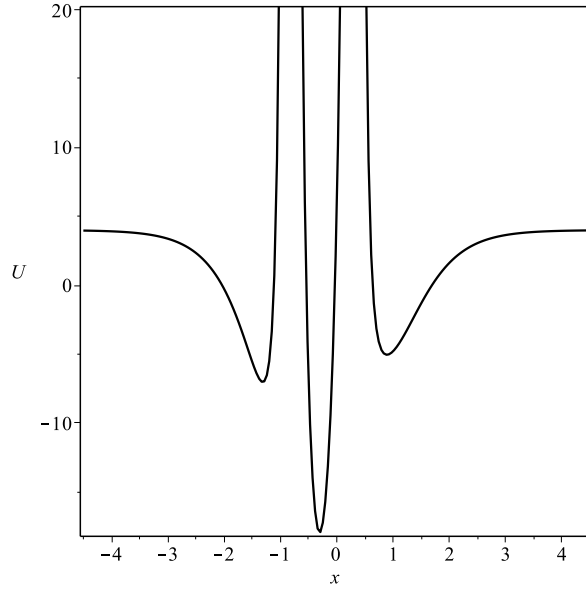


Figura 9.10 O potencial de estabilidade do modelo 2 para as soluções de triplo kink, plotadas para $p = q = 3$ e $b = 0.32$.

compacton (9.16) nós temos

$$\eta_0^{hc}(x) = \begin{cases} pq(1 + (-b + t(x))^q)^{p-1}(-b + t(x))^{q-1}s^2(x), & \text{se } x \leq -\bar{x}_2, \\ 0, & \text{se } x > -\bar{x}_2. \end{cases} \quad (9.26)$$

Para o half-compacton (9.17), obtém-se

$$\eta_0^{hc}(x) = \begin{cases} 0, & \text{for } x < \bar{x}_1 \\ pq(1 + (-b + t(x))^q)^{p-1}(-b + t(x))^{q-1}s^2(x), & \text{se } x \geq \bar{x}_1, \end{cases} \quad (9.27)$$

e para o compacton (9.18), podemos escrever

$$\eta_0^c(x) = \begin{cases} 0, & \text{for } x < -\bar{x}_2, \\ pq(1 + (-b + t(x))^q)^{p-1}(-b + t(x))^{q-1}s^2(x); & \text{for } -\bar{x}_2 \leq x \leq \bar{x}_1, \\ 0; & \text{for } x > \bar{x}_1. \end{cases} \quad (9.28)$$

Eles não tem nós, mostrando a estabilidade das soluções triplo-kink, half-compacton e compacton. Veja Fig. 9.11, onde nós plotamos o modo zero da solução triplo kink.

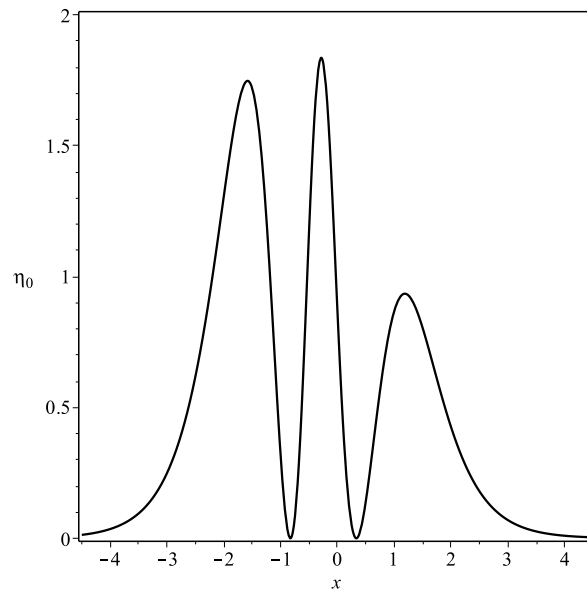


Figura 9.11 O modo zero do triplo kink do modelo 2, para $p = q = 3$ e $b = 0.32$.

Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho, apresentamos uma revisão de tópicos em teoria clássica de campos na parte I. No espaço plano, estudamos diversos tipos de soluções localizadas: kinks, lumps, vórtices, monopolos e dyons. Além disso, com a finalidade de introduzir o leitor no ambiente matemático do espaço curvo, estudamos modelos cosmológicos com campos escalares. Finalmente, estudamos um cenário de mundo brana usando uma geometria AdS_5 com uma dimensão extra infinita, modelando a brana com campos escalares.

A parte de revisão foi feita com a finalidade de formar uma base para se entender os novos resultados na parte II. No capítulo 8, vimos que é possível fazer uma transição suave de kinks para compactons fazendo o uso de um parâmetro que controla a massa dos mínimos do potencial. Curiosamente, quando aplicado no mundo brana, esse método origina uma brana híbrida, que é espessa dentro do espaço compacto, mas é fina fora dele. Este artigo apresenta um resultado que pode ser usado para estudos futuros, como a transição de kinks para half-compactons. Além disso, um procedimento semelhante pode ser usado para se estudar vórtices e monopolos. Uma outra possibilidade é a investigação da colisão de compactons, entendendo-os como um limite de kinks. Esses problemas estão sendo considerados.

Finalmente, no capítulo 9, usando o método da deformação, criamos modelos que apresentam soluções do tipo duplo kink e triplo kink. Mostramos que é possível cortar essas soluções para se obter estruturas compactas em modelos de teorias de campos com dinâmica usual, diferentemente do que foi feito no capítulo 3. Encerramos o capítulo estudando a estabilidade dos dois novos modelos apresentados. O procedimento apresentado pode ser usado para explorar novos modelos que eventualmente também podem ser usados no contexto de mundo brana.

Referências Bibliográficas

- [1] P. G. Drazin and R. S. Johnson, *Solitons: An Introduction*, Cambridge University Press (1989);
- [2] Eduardo Fradkin, *Field Theories of Condensed Matter Physics*, 2nd Ed., Cambridge University Press (2013);
- [3] Claudio Rebbi and Giulio Soliani, *Solitons and Particles*, World Scientific Publishing Company (1984);
- [4] Avinash Khare, Ivan C. Christov, and Avadh Saxena, *Successive phase transitions and kink solutions in ϕ^8 , ϕ^{10} and ϕ^{12} field theories*, Phys. Rev. E 90, 023208 (2014);
- [5] Donghwa Lee, Rakesh K. Behera, Pingping Wu, Haixuan Xu, Y. L. Li, Susan B. Sinnott, Simon R. Phillpot, L. Q. Chen, and Venkatraman Gopalan, *Mixed Bloch-Néel-Ising character of 180° ferroelectric domain walls*, Phys. Rev. B 80, 060102(R) (2009);
- [6] Hermann von Helmholtz, *Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche der Wirbelbewegung entsprechen*, J. für die reine und angewandte Mathematik, 55, 25–55 (1858);
- [7] P. G. Saffman, *Vortex Dynamics*, Cambridge University Press (1992);
- [8] A. A. Abrikosov, *On the Magnetic Properties of Superconductors of the Second Group*, Zh. Eksp. Teor. Fis. 32, 1442 (1957); Sov. Phys. JETP5, 1174 (1957);
- [9] U. Essmann and H. Trauble, *The direct observation of individual flux lines in type II superconductors*, Physics Letters, v. 24A, p. 526 (1967);
- [10] P. A. M. Dirac, *The theory of magnetic poles*, Phys. Rev. 74, 817-830 (1948);
- [11] Kimball A Milton, *Theoretical and experimental status of magnetic monopoles*, Rep. Prog. Phys. 69, 1637 (2006);
- [12] B. Acharya, *et al.*; *The Physics Programme Of The MoEDAL Experiment At The LHC*, (2014) [arXiv:1405.7662];
- [13] Barton Zwiebach, *A First Course in String Theory*, Second Edition, Cambridge University Press (2009);
- [14] Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos and Gia Dvali, *The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter*, Phys. Lett. B 429, 263-272 (1998);
- [15] M. Shifman, *LARGE EXTRA DIMENSIONS: Becoming acquainted with an alternative paradigm*, Int. J. Mod. Phys. A 25, 199-225 (2010);

- [16] Lisa Randall and Raman Sundrum, *Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension*, Phys. Rev. Lett. 83, 3370 (1999);
- [17] Lisa Randall and Raman Sundrum, *An Alternative to Compactification*, Phys. Rev. Lett. 83, 4690 (1999);
- [18] D. Bazeia, L. Losano, C. Wotzasek, *Domain walls in three-field models*, Phys. Rev. D 66, 105025 (2002);
- [19] Goldstein, Poole and Safko, *Classical Mechanics*, Third Edition, Addison Wesley (2001);
- [20] Nicholas Manton and Paul Sutcliffe, *Topological Solitons*, Cambridge University Press, 1st edition (2007);
- [21] A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics (2000);
- [22] Tanmay Vachaspati, *Kinks and Domain Walls: An Introduction to Classical and Quantum Solitons*, Cambridge University Press (2007);
- [23] D. Bazeia, *Topological solitons in a vacuumless system*, Physical Review D, Volume 60, 067705 (1999);
- [24] E. B. Bogomol'nyi, *The stability of classical solutions*, Sov. J. Nucl. Phys, Vol.24, No.4 (1976);
- [25] M. K. Prasad and Charles M. Sommerfield, *Exact Classical Solution for the 't Hooft Monopole and the Julia-Zee Dyon*, Phys. Rev. Lett. 35, 760 (1975);
- [26] D. Bazeia, L. Losano and J. M. C. Malbouisson, *Deformed defects*, Phys. Rev. D 66, 101701 (2002);
- [27] C.A. Almeida, D. Bazeia, L. Losano and J.M.C. Malbouisson, *New results for deformed defects*, Phys. Rev. D 69, 067702 (2004);
- [28] F. Cooper, A. Khare, U. Sukhatme, *Supersymmetry and Quantum Mechanics*, Phys. Rep. 251, 267 (1995);
- [29] G. Junker, *Supersymmetric Methods in Quantum and Statistical Physics*, Springer, Berlin (1996);
- [30] Roberto Menezes da Silva, *Defeitos Globais em Teoria de Campos e Aplicações*, Tese de Doutorado, Universidade Federal da Paraíba (2007);
- [31] Julio Rubinstein, *Sine-Gordon Equation*, Journal of Mathematical Physics, Volume 11, Number 1 (1970);
- [32] Dionisio Bazeia, *Campos Escalares em Ação*, Tese Apresentada em Concurso de Professor Titular, Universidade Federal da Paraíba (2004);
- [33] D. Bazeia, W. Freire, L. Losano, R.F. Ribeiro, *Topological Defects and The Trial Orbit Method*, Mod. Phys. Lett. A 17, 1945 (2002);

- [34] D. Bazeia and M.M. Santos, *Classical stability of solitons in systems of coupled scalar fields*, Phys. Lett. A 217, 28 (1996);
- [35] D. Bazeia, M. J. dos Santos and R. F. Ribeiro, *Solitons in systems of coupled scalar fields*, Phys. Lett. A 208, 84 (1995) [arXiv:hep-th/0311265];
- [36] D. Bazeia, J. R. S. Nascimento, R. F. Ribeiro and D. Toledo, *Soliton stability in systems of two real scalar fields*, J. Phys. A 30, 8157 (1997) [arXiv:hep-th/9705224];
- [37] D. Bazeia, H. Boschi-Filho and F. A. Brito, *Domain defects in systems of two real scalar fields*, JHEP 9904 (1999) 028 [arXiv:hep-th/9811084];
- [38] A. A. Izquierdo, M. A. G. Leon and J. M. Guilarte, *The kink variety in systems of two coupled scalar fields in two space-time*, Phys. Rev. D 65, 085012 (2002) [arXiv:hep-th/0201200];
- [39] P. Rosenau and J.M. Hyman, *Compactons: Solitons with finite wavelength*, Phys. Rev. Lett. 70, 564 (1993);
- [40] D. Bazeia, L. Losano, R. Menezes, and J.C.R.E. Oliveira, *Generalized Global Defect Solutions*, Eur. Phys. J. C 51, 953 (2007);
- [41] D. Bazeia, L. Losano, and R. Menezes, *First-order framework and generalized global defect solutions*, Phys. Lett. B 668, 246 (2008);
- [42] Milton Abramowitz and Irene A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, New York: Dover (1965);
- [43] R. B. Laughlin, *The Relationship Between High-Temperature Superconductivity and the Fractional Quantum Hall Effect*, Science 242, 525 (1988); *Superconducting Ground State of Noninteracting Particles Obeying Fractional Statistics*, Phys. Rev. Lett. 60, 2677 (1988);
- [44] H. B. Nielsen and P. Olesen, *Vortex-line models for dual strings*, Nucl. Phys. B61, 45 (1973);
- [45] Ivanice Zafalan, *Vórtices em modelos planares de teoria de campos*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba (2003);
- [46] D. Bazeia, E. da Hora, C. dos Santos, R. Menezes, *BPS Solutions to a Generalized Maxwell-Higgs Model*, Eur. Phys. J. C 71, 1833 (2011)
- [47] H. J. de Vega and F. A. Schaposnik, *Electrically Charged Vortices in Non-Abelian Gauge Theories with Chern-Simons Term*, Phys. Rev. Lett. 56, 2564 (1986);
- [48] R. Jackiw and Erick J. Weinberg, *Self-Dual Chern-Simons Vortices*, Phys. Rev. Lett., 64, 2234 (1990);
- [49] G. 't Hooft, *Magnetic monopoles in unified gauge theories*, Nucl. Phys. B79, 276-284 (1974);
- [50] A. M. Polyakov, *Particle spectrum in quantum field theory*, JETP Lett. 20, 194-195 (1974);

- [51] Alan H. Guth, *Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems*, Phys. Rev. D 23, 347 (1981);
- [52] J. Schwinger, *A Magnetic Model of Matter*, Science 165, 757 (1969);
- [53] B. Julia and A. Zee, *Poles with both magnetic and electric charges in non-Abelian gauge theory*, Phys. Rev. D 11, 2227 - 2232 (1975);
- [54] Jan R. Magnus; Heinz Neudecker, *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics*, Wiley (1999);
- [55] Sean Carroll, *An Introduction to General Relativity Spacetime and Geometry*, Addison Wesley (2004);
- [56] Robert M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press (1984);
- [57] Charles W. Misner, Kip S. Thorne and John Archibald Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman and Company (1973);
- [58] D. Bazeia, C.B. Gomes, L. Losano and R. Menezes, *First-order formalism and dark energy* (2008) [arXiv:astro-ph/0512197];
- [59] D. Bazeia, L. Losano, J.J. Rodrigues and R. Rosenfeld, *First-order formalism for dark energy and dust* (2008) [arXiv:astro-ph/0611770];
- [60] Keiichi Akama, *An early proposal of “Brane World”*, Lect. Notes Phys. Volume 176, Pages 267-271 (1982) [arXiv:hep-th/0001113];
- [61] V.A. Rubakov, M.E. Shaposhnikov, *Do we live inside a domain wall?*, Phys. Lett. B, Volume 125, Issues 2–3, Pages 136–138 (1983);
- [62] Matt Visser, *An exotic class of Kaluza-Klein models*, Phys. Lett. B, Volume 159, Issue 1, Pages 22–25 (1985);
- [63] Euan J. Squires, *Dimensional reduction caused by a cosmological constant*, Phys. Lett. B, Volume 167, Issue 3, Pages 286–288 (1986);
- [64] G.W. Gibbons, D.L. Wiltshire, *Spacetime as a membrane in higher dimensions*, Nuclear Physics B, Volume 287, Pages 717–742 (1987);
- [65] Walter D. Goldberger and Mark B. Wise, *Modulus Stabilization with Bulk Fields*, Phys. Rev. Lett. 83, 4922 (1999);
- [66] O. DeWolfe, D. Z. Freedman, S. S. Gubser, and A. Karch, *Modeling the fifth dimension with scalars and gravity*, Phys. Rev. D 62, 046008 (2000);
- [67] D. Bazeia, C. Furtado and A. R. Gomes, *Brane structure from a scalar field in warped spacetime*, JCAP, 0402, 002 (2004) [arXiv:hep-th/0308034];
- [68] Altemar Lobão de Sousa Júnior, *Teorias com dinâmica Generalizada*, Tese de Doutorado, Universidade Federal da Paraíba (2014);

- [69] D. Bazeia, A. S. Lobão Jr., L. Losano, and R. Menezes, *First-order formalism for flat branes in generalized N-field models*, Phys. Rev. D 88, 045001 (2013) [arXiv:1306.2618 [hep-th]];
- [70] D. Bazeia and A. R. Gomes, *Bloch Brane*, JHEP, 0405, 012 (2004) [arXiv:hep-th/0403141];
- [71] D. Bazeia, L. Losano, M. A. Marques and R. Menezes, *From Kinks to Compactons*, Phys. Lett. B, Volume 736, Pages 515–521 (2014);
- [72] D. Bazeia, L. Losano, M. A. Marques and R. Menezes, *Compact Structures in Standard Field Theory*, Europhys. Lett., Volume 107, Number 6, 61001 (2014);
- [73] H. Arodz, *Topological Compactons*, Acta Phys. Pol. B 33, 1241 (2002); *Symmetry breaking transition and appearance of compactons in a mechanical system*, idibem, B 35, 625 (2004); H. Arodz and P. Klimas, *Chain of impacting pendulums as non-analytically perturbed sine-Gordon system*, Acta Phys. Pol. B 36, 787 (2005); H. Arodz, P. Klimas, and T. Tyranowski, *Compact oscillons in the signum-Gordon model*, Phys. Rev. D 77, 047701 (2008);
- [74] D. Bazeia, J. Menezes and R. Menezes, *New Global Defect Structures*, Phys. Rev. Lett. 91, 241601 (2003);
- [75] P.-O. Jubert, R. Allenspach and A. Bischof, *Magnetic domain walls in constrained geometries*, Phys. Rev. B 69, 220410(R) (2014).